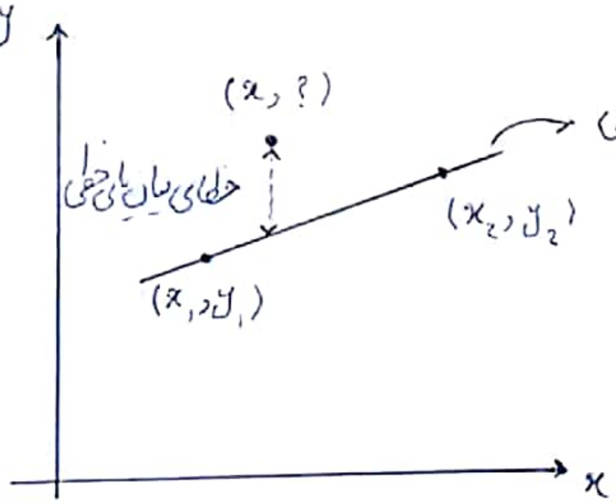
# برازش توابع و میان یابی

در ارزیابی داده ها و اطلاعاتی که توسط آزمایش بدست می آید با توجه به اینکه همواره امکان آزمایش و اندازه گیری کمیت های یک سیستم در تمامی محدوده تغییرات یک یا چند پارامتر مقدور نمی باشد، همواره نیاز به دانستن مقادیر این کمیات در نقاطی می باشیم که اندازه گیری در آن ها صورت نگرفته است. این عمل توسط میان یابی انجام می پذیرد که اهمیت زیادی در محاسبات عددی داده ها دارد.




میان یابی خطی

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

در ادامه روش های مختلف میان یابی و برازش توابع معرفی می گردد. با استفاده از این روش ها می توان داده های گسسته را تبدیل به توابعی پیوسته نمود.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| متغیر مستقل $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | ... |
| وابسته $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | ... |

$\longrightarrow y = f(x)$

— روش اختلافات محدود

در این روش ابتدا جدول اختلافات محدود را بصورت زیر تشکیل می دهیم:

متغیر مستقل ← | متغیر وابسته ←

| $x$ | $f(x)$ | اختلافات اول | اختلافات دوم | اختلافات سوم |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | |
| | | $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$ | |
| | | $\Delta f_1 = f_2 - f_1$ | | $\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$ |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$ | |
| | | $\Delta f_2 = f_3 - f_2$ | | |
| $x_3$ | $f_3$ | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | |

در مرحله بعد از رابطه نیوتن - گریگوری (Newton-Gregory) برای نوشتن یک تابع چندجمله‌ای درجه $n$ ام که از سری داده های $(x, f(x))$ عبور می کند استفاده می نمائیم.

$$f(x) \simeq P_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \qquad \left(r = \frac{x - x_0}{h}\right)$$

از این روش به شرطی می توان استفاده نمود که فواصل میان متغیرهای مستقل برابر باشند.

مثال: با استفاده از روش اختلافات محدود یک تابع چندجمله‌ای درجه دوم را برای برازش داده‌های زیر تعیین کنید.

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 2 |

جدول اختلافات محدود

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ 1 | 1 $f_0$ | | |
| | | $\Delta f_0 = 4-1 = 3$ | |
| $x_1$ 2 | 4 $f_1$ | | $\Delta^2 f_0 = -2-3 = -5$ |
| | | $\Delta f_1 = 2-4 = -2$ | |
| $x_2$ 3 | 2 $f_2$ | | |

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 1 \longrightarrow r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{1} = x - 1$$

فرمول نیوتن-گریگوری

$$f(x) \simeq P_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 1 + 3r + \left(\frac{-5}{2}\right) r(r-1) =$$

$$1 + 5.5r - 2.5r^2 = 1 + 5.5(x-1) - 2.5(x-1)^2$$

- روش اختلافات تقسیم شده

چنانچه فواصل میان متغیرهای مستقل برابر نباشد می توان از این روش استفاده نمود.
جدول اختلافات تقسیم شده را بصورت زیر تشکیل می دهیم

| $x$ | $f(x)$ | اختلافات تقسیم شده اول | اختلافات تقسیم شده دوم |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | |
| | | $f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$ | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ |
| | | $f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$ | |
| $x_2$ | $f_2$ | | $f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ |
| | | $f[x_2,x_3]=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}$ | |
| $x_3$ | $f_3$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

پس با توجه به داده های موجود می توان یک چندجمله‌ای درجه n ام بصورت زیر تعریف نمود:

$$f(x) \simeq P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

چنانچه در چندجمله‌ای بالا به جای $x$ مقدار $x_0$ را قرار دهیم باید حاصل برابر $f_0$ باشد:

$$x=x_0 \longrightarrow f(x_0) = a_0 + a_1\cancel{(x_0-x_0)} + a_2\cancel{(x_0-x_0)}(x_0-x_1) + \dots = a_0 = f_0 \ \checkmark$$

صحیح

$$x=x_1 \longrightarrow f(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) + a_2(x_1-x_0)\cancel{(x_1-x_1)} + \dots = a_0 + a_1(x_1-x_0) = f_1$$

$$\hookrightarrow a_1 = \frac{f_1-a_0}{x_1-x_0} \xrightarrow{a_0=f_0} a_1 = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = f[x_0,x_1] \ \checkmark$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم ضرایب $a_i$ همان سرستون های جدول اختلافات تقسیم شده می باشد.

مثال: با استفاده از روش اختلافات تقسیم شده یک چندجمله‌ای درجه دوم را برای برازش داده‌های زیر بدست آورید:

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -5 | 1 | 25 | 55 |

| | $x$ | $f(x)$ | اختلافات تقسیم شده اول | اختلافات تقسیم شده دوم |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 0 | $-5$ $f_0$ | | |
| | | | $f[x_0,x_1]=\frac{1+5}{1-0}=6$ | |
| $x_1$ | 1 | $1$ $f_1$ | | $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{12-6}{3-0}=2$ |
| | | | $f[x_1,x_2]=\frac{25-1}{3-1}=12$ | |
| $x_2$ | 3 | $25$ $f_2$ | | $f[x_1,x_2,x_3]=\frac{30-12}{4-1}=6$ |
| | | | $f[x_2,x_3]=\frac{55-25}{4-3}=30$ | |
| $x_3$ | 4 | $55$ $f_3$ | | |

$$a_0=-5\,,\ a_1=6\,,\ a_2=2$$

$$f(x)\simeq P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=-5+6(x-0)+2(x-0)(x-1)$$

$$=-5+4x+2x^2$$

## - روش چندجمله‌ای لاگرانژ (Lagrangian Polynomial)

برای عوامل ناساوی متغیر مستقل، علاوه بر روش اختلافات تقسیم شده، روش لاگرانژ که شباهت زیادی به روش مذکور دارد، قابل استفاده است.

در این روش برای n+1 داده بصورت $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ یک چندجمله‌ای درجه n ام را می‌توان ایجاد نمود:

$$f(x) \simeq P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n) + a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

برای تعیین ضرایب $a_i$ کافی است نقاط $(x_0, f_0)$ تا $(x_n, f_n)$ را در چندجمله‌ای بالا قرار داده. این نقاط باید در این تابع صدق نمایند.

$$f_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n) \longrightarrow a_0 = \frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$f_1 = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n) \longrightarrow a_1 = \frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$f_n = a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \longrightarrow a_n = \frac{f_2}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

حال جایگذاری ضرایب $a_i$ بدست آمده را در چندجمله‌ای درجه nام $P_n(x)$ جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$f(x) \simeq P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} f_0 +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} f_1 + \cdots +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} f_n$$

مثال: چندجمله‌ای میانیابی لاگرانژ را برای داده‌های زیر بدست آورید:

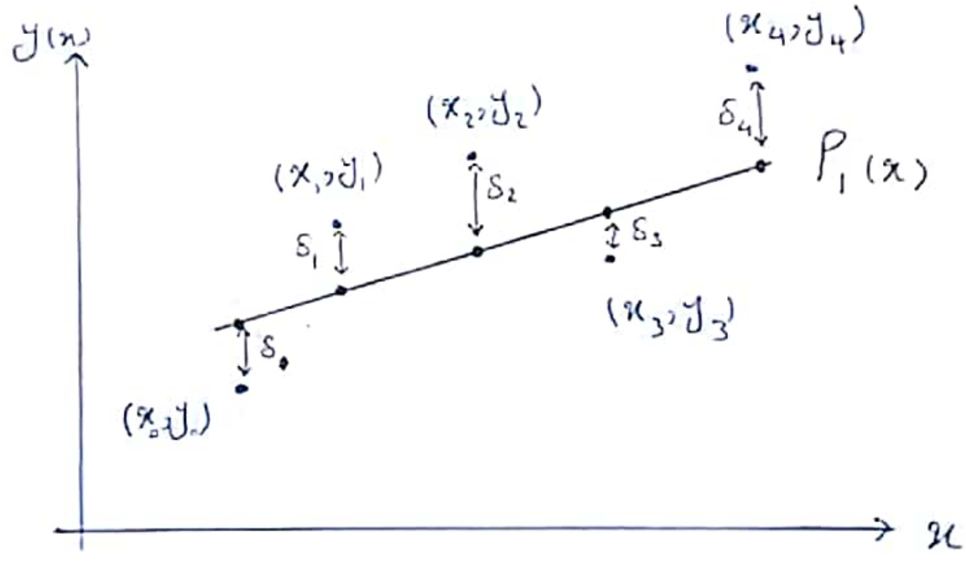
| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 2 | 5 | 6 |
| | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ |

$$f(x) \simeq P_2(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)}(2) + \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}(5) +$$

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}(6)$$

- روش چندجمله‌ای حداقل مربعات (The Least-squares Polynomial)

اگر بنا باشد که از $n+1$ نقطه یک چندجمله‌ای درجه $m$ بصورت $P_m(x)$ عبور داده شود $(m<n)$ در اینصورت تعداد زیادی چندجمله‌ای می‌توان یافت که همگی از تمامی $n+1$ نقطه عبور نمایند. این امر ایجاب می‌نماید که معیاری برای انتخاب بهترین آنها داشته باشیم. این معیار بر اساس حداقل مجموع مربعات اختلاف مقادیر $P_m(x)$ در تمامی نقاط با مقادیر واقعی تابع $y(x)$ می‌باشد.




اگر مقدار چندجمله‌ای درجه $m$ را در هر نقطه $x_i$ با $P_m(x_i)$ نشان دهیم و مقدار واقعی تابع در $x_i$ برابر با $y_i$ باشد در آنصورت خطای حاصله $(\delta_i)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_i = P_m(x_i) - y_i$$

این مقادیر خطا در بعضی از نقاط مثبت و در بعضی از نقاط منفی خواهد بود. به جهت اینکه در محاسبه مجموع این خطاها در تمامی نقاط، مقادیر مثبت و منفی خطا یکدیگر را حذف

کلید مجموع مربعات این خطاها را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$S=\sum_{i=0}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=0}^{n}\left[P_m(x_i)-y_i\right]^2$$

یک چندجمله‌ای درجه $m$ را می‌توان بصورت زیر نشان داد

$$P_m(x)=\sum_{j=0}^{m}a_j x^j \longrightarrow m=1 \Rightarrow P_1(x)=a_0+a_1x$$

$$m=2 \Rightarrow P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\vdots$$

$$m=m \Rightarrow P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m$$

بهترین چندجمله‌ای تقریبی متناظر با داده‌ها، چندجمله‌ای $P_m(x)$ خواهد بود به شرطی که مجموع مربعات خطا یعنی $S$ حداقل باشد.

$$S=\sum_{i=0}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=0}^{n}\left[P_m(x_i)-y_i\right]^2=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right]^2$$

برای تعیین مینیمم $S$ باید از $S$ نسبت به ضرایب مجهول چندجمله‌ای $P_m(x)$ مشتق گرفته و حاصل را برابر صفر قرار دهیم. در این شرایط به تعداد ضرایب مجهول $a_j$ معادله ایجاد می‌شود که با حل دستگاه معادلات این ضرایب مجهول که در حقیقت مجهولات موجود در چندجمله‌ای مورد نظر هستند، تعیین می‌گردند.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a_j}\right)_{j=0,1,\dots,m}=0$$

بطور مثال اگر هدف تعیین بهترین خط عبوری از یک سری داده باشد خواهیم داشت.

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[ P_1(x_i) - y_i \right]^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[ a_0 + a_1 x_i - y_i \right]^2$$

حداقل سازی S

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left[ a_0 + a_1 x_i - y_i \right] = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^{n} x_i \left[ a_0 + a_1 x_i - y_i \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i = 0 \\[2ex] \sum_{i=0}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = 0 \end{cases}$$

تعداد نقاط یا داده‌ها

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \\[2ex] a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

با حل دو معادله - دو مجهول روبرو مقادیر $a_0$ و $a_1$ تعیین شده در نتیجه $P_1(x)$ که همان بهترین خط گذرنده از نقاط می‌باشد بدست می‌آید.

مثال. با استفاده از روش چندجمله‌ای حداقل مربعات، بهترین خط گذرنده از پنج نقطه زیر را تعیین نمایید:

| $x$ | 1 | -2 | 0 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 4 | 4 | 7 |

$$\sum x_i = 1-2+0+3+2 = 4 \qquad \sum x_i^2 = 1+4+0+9+4 = 18$$

$$\sum y_i = 3+2+4+4+7 = 20 \qquad \sum x_i y_i = (1\times3)-(2\times2)+(0\times4)+(3\times4)+(2\times7) = 25$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 4a_1 = 20 \\ 4a_0 + 18a_1 = 25 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a_0 = 3.51 \\ a_1 = 0.608 \end{matrix} \longrightarrow P_1(x) = 3.51 + 0.608x$$

# حل دستگاه معادلات جبری

در بسیاری از محاسبات مهندسی نیاز به حل همزمان یک سری از معادلات جبری خواهیم داشت که به آن دستگاه معادلات جبری می گویند.

برای حل اینگونه از معادلات روش های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به دو دسته ۱- روش های مستقیم یا حذفی ۲- روش های غیرمستقیم یا تکراری تقسیم بندی می شوند.

معمولاً چنانچه تعداد معادلات کمتر از چهل معادله و چهل مجهول باشد از روش های مستقیم و اگر بیشتر از این تعداد باشد از روش های غیرمستقیم برای حل دستگاه معادلات استفاده می شود.

## روش های مستقیم

### ۱- روش حذفی گوس (Gaussian Elimination)

اساس این روش بر حذف ساده مجهولات استوار می باشد. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

این دستگاه معادلات را می توان به فرم ماتریسی درآورد:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ثوابت}}$$

در مرحله بعد ماتریس جامعی که از ماتریس ضرایب و ثوابت تشکیل شده را ایجاد می نمائیم:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]_{n\times(n+1)}$$

ماتریس افزوده

پس با انجام یک سری عملیات ضرب و تقسیم این ماتریس جامع را به تبدیل به یک ماتریس بالا مثلثی که عناصر زیر قطر آن صفر می باشند ~~[illegible]~~ می کنیم:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

در پایان با استفاده از تبدیل ماتریس به معادلات و جایگذاری پس رو مقادیر مجهولات

بدست می آید:

مثال: دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش گوس حل کنید

$$\begin{cases} 3x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 117 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 283 \end{cases}$$

حل:

① تبدیل دستگاه معادلات به ماتریس افزوده

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

② تبدیل ماتریس افزوده به ماتریس بالا مثلثی

- عناصر مورد نظر در ماتریس را ستون به ستون تبدیل به صفر می نماییم.
- برای این منظور از عناصر روی قطر اصلی همان ستون کمک می گیریم

$$A_2 - \left(\frac{A_1}{3} \times 2\right) \longrightarrow A_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

$$A_3 - \left(\frac{A_1}{3} \times 4\right) \longrightarrow A_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

$$A_3 - \left(\frac{A_2}{-9} \times (-23)\right) \longrightarrow A_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \end{array}\right]$$

۳ تبدیل ماتریس بالا مثلثی به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 3x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 18 \\ -9x_2 - 3x_3 = 105 \\ -\frac{7}{3}x_3 = -\frac{28}{3} \end{cases}$$

۴ جایگذاری پس رو

$$-\frac{7}{3}x_3 = -\frac{28}{3} \longrightarrow x_3 = 4 \longrightarrow x_2 = -13 \longrightarrow x_1 = 72$$

## ۲- روش گوس - جردن (Gauss-Jordan)

این روش مشابه روش حذفی گوس است. تفاوت این روش با روش گوس در این است که ماتریس افزوده باید به یک ماتریس قطری با قطر برابر یک تبدیل شود. این عمل باعث می‌شود که جهت تعیین جواب‌ها، دیگر نیازی به جایگذاری پس رو نباشد.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ماتریس قطری}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right]$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش گوس - جردن حل نمایید.

$$\begin{cases} 3x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 117 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 283 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right] \qquad \frac{A_1}{3} \to A_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

$$A_2 - (A_1 \times 2) \to A_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right] \qquad A_3 - (A_1 \times 4) \to A_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

$$\left(\frac{A_2}{-9}\right) \longrightarrow A_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{35}{3} \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

$$A_1 - (A_2 \times 6) \longrightarrow A_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{35}{3} \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

$$A_3 - (A_2 \times (-23)) \longrightarrow A_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{35}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \end{array}\right]$$

$$\left(\frac{A_3}{-\frac{7}{3}}\right) \longrightarrow A_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{35}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$A_1 - (A_3 \times 1) \longrightarrow A_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{35}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$A_2 - (A_3 \times \tfrac{1}{3}) \longrightarrow A_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = 72 \quad x_2 = -13 \quad x_3 = 4$$

## ۳- روش چولسکی (cholesky)

این روش نسبت به روش های دیگر از لحاظ زمان مورد نیاز جهت محاسبات رایانه‌ای ارجح است.

در این روش ماتریس ضرائب باید بصورت حاصلضرب دو ماتریس $[L]$ و $[U]$ درآمده که این ماتریس ها به فرم زیر می باشند:

برای ماتریس 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه عناصر ماتریس ضرائب مشخص هستند به ترتیب یک ستون یک سطر از این ماتریس حاصلضرب را محاسبه می کنیم. فرم ماتریسی دستگاه معادله $[A][x]=[b]$

$$\xrightarrow{A=LU} LUx=b \xrightarrow{\times L^{-1}} L^{-1}LUx=L^{-1}b$$

$$\longrightarrow Ux=\underbrace{L^{-1}b}_{d} \quad ①$$

$$\xrightarrow{①} L^{-1}b=d \xrightarrow{\times L} LL^{-1}b=Ld$$

$$\longrightarrow b=Ld \quad ②$$

بنابراین در روش چولسکی

۱- ماتریس $[L]$ و $[U]$ تعیین می شود

۲- با استفاده از رابطه ② ماتریس $[d]$ بدست می آید.

۳- " " " ① مجهولات $x$ محاسبه می شود.

مثال: دستگاه معادلات زیر را با روش چولسکی حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[x]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}}_{[b]}$$

حل:

مرحله 1

ماتریس ضرایب

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11} = 3$$

$$\downarrow \quad a_{21} = l_{21} = 1$$

$$a_{31} = l_{31} = 2$$

$$\longrightarrow \quad a_{12} = l_{11} u_{12} \Rightarrow u_{12} = -\frac{1}{3}$$

$$a_{13} = l_{11} u_{13} \Rightarrow u_{13} = \frac{2}{3}$$

$$\downarrow \quad a_{22} = l_{21} u_{12} + l_{22} \Rightarrow l_{22} = \frac{7}{3}$$

$$a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} \Rightarrow l_{32} = -\frac{4}{3}$$

$$\longrightarrow \quad a_{23} = l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23} \Rightarrow u_{23} = 1$$

$$\downarrow \quad a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + l_{33} \Rightarrow l_{33} = -1$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مرحله ۲

$$b = Ld \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} d_1 = 4 \\ d_2 = 3 \\ d_3 = 2 \end{array}$$

مرحله ۳

$$Ux = d \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 3 \end{array}$$

# روش های غیر مستقیم (تکراری)

در این روش ها عملیات حدس و خطا انجام می شود و با توجه خاصی به همگرایی در حل معادلات نمود.

شرط کافی برای همگرایی در این روش ها زمانی تحقق پیدا می کند که قطر غالب داشته باشیم، یعنی قدر مطلق ضرایب قطر اصلی دستگاه، بیشتر از مجموع قدر مطلق اجزاء اطراف آن باشد:

$$\frac{\sum |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leqslant 1 \quad i \neq j$$

در غیر اینصورت می توان با جابجائی معادلات قطر غالب را ایجاد نمود

۱- روش ژاکوبی (Jacobi)

اگر شکل کلی دستگاه معادلات را بصورت زیر داشته باشیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

① پس از بررسی شرط همگرائی (قطر غالب) ابتدا از هر معادله به ترتیب یکی از مجهولات $x_i$ را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{cases}$$

۲) در مرحله بعد حدس اولیه مقادیر $x_i$ را در معادلات جایگزین می کنیم و مقادیر جدیدی را برای $x_i$ بدست می آوریم.

۳) سپس آزمون همگرایی را برای بررسی دقت محاسبات انجام می دهیم:

$$\left| x_i^{k+1} - x_i^{k} \right| \leqslant \varepsilon$$

$\varepsilon$ : دقت محاسبات

$k = 0, 1, 2, \dots$ : شمارنده تکرار محاسبات

۴) در صورت مثبت بودن آزمون همگرایی به پاسخ مورد نظر رسیده ایم در غیر اینصورت مقادیر بدست آمده به جای مقادیر حدس زده شده مورد استفاده قرار می گیرد:

$$x_i^{k} = x_i^{k+1}$$

۵) محاسبات دوباره تکرار می شود تا همگرایی لازم بدست آید

مثال: دستگاه معادلات زیر را با روش ژاکوبی و حدس اولیه $x_1=x_2=x_3=1$ حل کنید. دقت محاسبات را ($\varepsilon=0.01$) در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1+0.2x_2+0.5x_3=2 \\ 0.5x_1+0.3x_2+x_3=3 \\ 0.2x_1+x_2+0.3x_3=1 \end{cases}$$

حل:

بررسی شرط همگرایی (قطر غالب):

با جابجایی معادله دوم و سوم این شرط برقرار می‌شود

$$\begin{cases} x_1+0.2x_2+0.5x_3=2 \\ 0.2x_1+x_2+0.3x_3=1 \\ 0.5x_1+0.3x_2+x_3=3 \end{cases}$$

بازنویسی معادلات برحسب مجهولات:

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=2-(0.2x_2^{k}+0.5x_3^{k}) \\ x_2^{k+1}=1-(0.2x_1^{k}+0.3x_3^{k}) \\ x_3^{k+1}=3-(0.5x_1^{k}+0.3x_2^{k}) \end{cases}$$

جایگذاری حدس اولیه در معادلات و تعیین مقادیر جدید $x_i$:

$x_1^0=x_2^0=x_3^0=1$

$$\begin{cases} x_1^1=2-(0.2+0.5)=1.3 \\ x_2^1=1-(0.2+0.3)=0.5 \\ x_3^1=3-(0.5+0.3)=2.2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.5 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

مرحله اول

بررسی دقت محاسبات : $(\varepsilon = 0.01)$

$$|1.3 - 1| = 0.3 \quad \times$$

$$|0.5 - 1| = 0.5 \quad \times$$

$$|2.2 - 1| = 1.2 \quad \times$$

جایگزینی مقادیر جدید $x$ به جای حدس اولیه و تکرار محاسبات :

$$\underset{\text{مرحله دوم}}{\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.08 \\ 2.2 \end{bmatrix}} \to \underset{\text{مرحله سوم}}{\begin{bmatrix} 0.884 \\ 0.18 \\ 2.575 \end{bmatrix}} \to \begin{bmatrix} 0.676 \\ 0.050 \\ 2.504 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.738 \\ 0.114 \\ 2.647 \end{bmatrix} \to \cdots \to \underset{\text{مرحله دهم}}{\begin{bmatrix} 0.657 \\ 0.070 \\ 2.639 \end{bmatrix}}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0.661 \\ 0.074 \\ 2.648 \end{bmatrix} \checkmark$$

## ۲- روش گوس - سیدل (Gauss-Seidel)

تفاوت این روش با روش ژاکوبی در این است که در روش گوس-سیدل هر $x$ که محاسبه می‌شود حتماً مقدار آن در معادلات بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد در صورتیکه در روش ژاکوبی ابتدا کلیه $x$ها محاسبه می‌گردد و سپس همه آنها را در سیستم معادلات قرار داده و مقادیر جدیدی برای $x$ها محاسبه می‌شود.

معمولاً روش گوس-سیدل سریعتر از روش ژاکوبی به نتیجه می‌رسد.

مثال: دستگاه معادلات قبلی را با روش گوس-سیدل حل کنید.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 2-(0.2x_2^k+0.5x_3^k) \\ x_2^{k+1} = 1-(0.2x_1^k+0.3x_3^k) \\ x_3^{k+1} = 3-(0.5x_1^k+0.3x_2^k) \end{cases}$$

جایگذاری حدس اولیه و جدیدترین مقادیر $x$ در معادلات:

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$$

$$\begin{cases} x_1^1 = 2-(0.2\times1+0.5\times1) = 1.3 \\ x_2^1 = 1-(0.2\times1.3+0.3\times1) = 0.44 \\ x_3^1 = 3-(0.5\times1.3+0.3\times0.44) = 2.22 \end{cases}$$

$$\underset{\text{مرحله اول}}{\begin{bmatrix}1.3\\0.44\\2.22\end{bmatrix}} \rightarrow \underset{\text{مرحله دوم}}{\begin{bmatrix}0.802\\0.174\\2.547\end{bmatrix}} \rightarrow \begin{bmatrix}0.691\\0.079\\2.624\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0.668\\0.079\\2.642\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0.663\\0.074\\2.646\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0.661\\0.079\\2.648\end{bmatrix}$$

# مشتق‌گیری عددی

برای تعیین مشتق و یا شیب در یک نقطه مشخص از مجموعه داده‌ها می‌توان از مشتق‌گیری عددی استفاده نمود. باید دقت نمود که محاسبه مشتق عددی در یک نقطه می‌تواند خطای زیادی را در برداشته باشد. بنابراین در محاسبات و استفاده از این روش‌ها باید دقت نمود.

روابط مشتق‌گیری عددی معمولاً با استفاده از سری تیلور بدست می‌آیند:

سری تیلور

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{n}(x_0)$$

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad x_i \xleftrightarrow{\;h\;} x_{i+1}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \underbrace{\frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots}_{\text{خطای برش}}$$

$x \to x_0 + h$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} , \quad O(h)$$

درجه خطا

$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} , \; O(h)}$$

مشتق عددی پیشرو

Forward Derivation

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$\to f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \underbrace{\frac{2h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots}_{\text{برش}}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad , O(h^2)$$

$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad , O(h^2)}$$

مشتق عددی مرکزی

Central Derivation

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \underbrace{\frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots}_{\text{برش}}$$

$$\to f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \quad , O(h)$$

$$\boxed{f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad , O(h)}$$

مشتق عددی پسرو

Backward Derivation

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \boxed{\frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x_0)} + \cdots \longrightarrow \text{خطا}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}, \; O(h^2)$$

$$\boxed{f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \; O(h^2)}$$ مشتق دوم مرکزی

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}, \; O(h)$$ مشتق دوم پیشرو

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}, \; O(h)$$ مشتق دوم پسرو

مثال: با توجه به داده‌های موجود در جدول زیر $f'(1)$ و $f''(1)$ را تعیین کنید:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.9 | 2.4596 |
| 1.0 | 2.7183 |
| 1.1 | 3.0040 |

$h = 0.1$

مرکزی $f'(1) = \dfrac{f(1.1) - f(0.9)}{2 \times 0.1} = \dfrac{3.004 - 2.4596}{0.2} = 2.722$

پیشرو $f'(1) = \dfrac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \dfrac{3.004 - 2.7183}{0.1} = 2.857$

پسرو $f'(1) = \dfrac{f(1) - f(0.9)}{0.1} = \dfrac{2.7183 - 2.4596}{0.1} = 2.587$

مرکزی $f''(1) = \dfrac{f(1.1) - 2f(1) + f(0.9)}{(0.1)^2} = 2.7$

# حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلات دیفرانسیل:

- معمولی (ODE): شامل جمله دیفرانسیل کامل هستند و مشتق نسبت به یک متغیر مستقل گرفته شده است.
- پاره‌ای (PDE): شامل عبارات دیفرانسیل جزئی هستند و مشتق نسبت به بیش از یک متغیر مستقل گرفته شده است $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)$

مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل معمولی خود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- مسائل مقدار اولیه Initial Value Problems (IVP)

در این دسته از مسائل علاوه بر معادله دیفرانسیل یک شرط اولیه نیز در مسئله وجود دارد و فرم کلی مسئله بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \longrightarrow \text{معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول} \\ y(x_0) = y_0 \longrightarrow \text{شرط اولیه} \end{cases}$$

$x$: متغیر مستقل

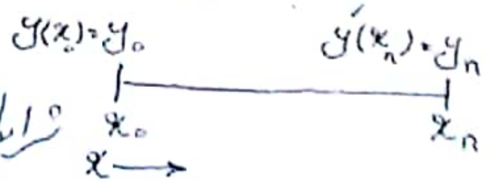
$y$: متغیر وابسته


۲- مسائل مقدار مرزی Boundary Value Problems (BVP)

در این مسائل علاوه بر معادله دیفرانسیل، اطلاعاتی از متغیر وابسته در مرزهای سیستم نیز داده می‌شود که به آن شرایط مرزی می‌گویند.

بطور مثال:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y^2 = x \\ \left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_n) = y_n \end{array}\right\} \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$



# روش های حل عددی مسائل مقدار اولیه

## ۱- روش اویلر (Euler Method)

روش اویلر بر مبنای بسط تیلور پایه گذاری شده است.

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0)+\dots$$

$$y(x_0+h)\simeq y(x_0)+hy'(x_0)\ ,\ O(h^2)$$

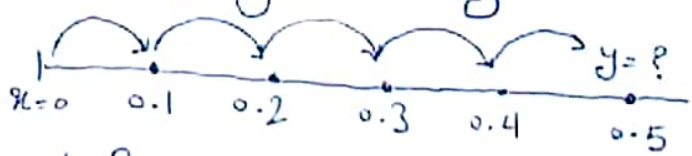
$$\xrightarrow{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}\quad y(x_0+h)\simeq y(x_0)+hf(x_0,y_0)$$

$$\boxed{y_{i+1}\simeq y_i+hf(x_i,y_i)}$$

مثال: مقدار $y(0.5)$ را با درنظر گرفتن گام محاسباتی $h=0.1$ تعیین کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-2x-y\\ y(0)=-1\end{cases}$$

$$f(x,y)=-2x-y$$




$$y(0.1)=y(0)+hf(0,-1)=-1+0.1(-2\times0+1)=-0.9$$

$$y(0.2)=y(0.1)+hf(0.1,-0.9)=-0.9+0.1(-2\times0.1+0.9)=-0.83$$

$$y(0.3)=y(0.2)+hf(0.2,-0.83)=-0.83+0.1(-2\times0.2+0.83)=-0.78$$

$$y(0.4)=y(0.3)+hf(0.3,-0.78)=-0.78+0.1(-2\times0.3+0.78)=-0.76$$

$$y(0.5)=y(0.4)+hf(0.4,-0.76)=-0.76+0.1(2\times0.4+0.76)=-0.77\checkmark$$

## Runge-kutta (Second order) ۲- روش رانگ-کاتا مرتبه دوم

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + h, y_i + k_1)$$

## Runge-kutta (Third order) ۳- روش رانگ-کاتا مرتبه سوم

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\,f(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

## Runge-kutta (Fourth order) ۴- روش رانگ-کاتا مرتبه چهارم

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\,f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h\,f(x_i + h, y_i + k_3)$$

مثال: با استفاده از روش R-K-4 مقدار $y(1.1)$ را با در نظر گرفتن $h=0.1$ تعیین نمایید:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(1) = 2.3 \end{cases} \qquad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$K_1 = h\,f(1, 2.3) = 0.1\left[1^2 + 2.3^2\right] = 0.629$$

$$K_2 = h\,f\left(1 + \frac{0.1}{2}, 2.3 + \frac{0.629}{2}\right) = 0.1\left[\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + \left(2.3 + \frac{0.629}{2}\right)^2\right] = 0.794$$

$$K_3 = h\,f\left(1 + \frac{0.1}{2}, 2.3 + \frac{0.794}{2}\right) = 0.1\left[\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + \left(2.3 + \frac{0.794}{2}\right)^2\right] = 0.837$$

$$K_4 = h\,f(1 + 0.1, 2.3 + 0.837) = 0.1\left[(1 + 0.1)^2 + (2.3 + 0.837)^2\right] = 1.105$$

$$y(1.1) = y(1) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.132 \checkmark$$

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

الف) با استفاده از سه روش اویلر، R-K-2 و R-K-4 مقدار $y(0.2)$ را بدست آورید. مقدار گام محاسباتی $h = 0.1$ است.

ب) جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل را تعیین نمایید.

ج) اختلاف مقادیر بدست آمده از روشهای عددی و تحلیلی را که همان مقدار خطای روشهای عددی است تعیین کنید.

# حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

فرم کلی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه یک بصورت زیر می باشد:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_K) & y_1(x_0) = A \\[2ex]
\dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_K) & y_2(x_0) = B \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{dy_K}{dx} = f_K(x, y_1, y_2, \dots, y_K) & y_K(x_0) = Z
\end{cases}
$$

که در این دستگاه معادلات $x$ متغیر مستقل و $y_1, y_2, \dots, y_K$ متغیرهای وابسته (مجهولات) می باشند. روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل بصورت عددی همان روش های حل یک معادلات می باشد. البته باید دقت کافی در استفاده از روابط و جایگذاری مقادیر مناسب به عمل آید.

محاسبات مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل بوسیله دو مثال توضیح داده می شود:

مثال: با استفاده از روش اولر دستگاه دو مجهولی زیر را حل نمایید:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 & y_1(0) = 0.1 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = 8x - 64y_1 & y_2(0) = 2 \end{cases}$$

$h = 0.1$

$y_1(0.2) = ?$

$y_2(0.2) = ?$

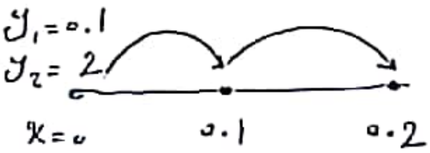
اولر $\rightarrow$ $y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$

برای حل دستگاه معادلات $\quad y_{i+1,j} = y_{i,j} + h\,f_j\left(x_i, \{y_{i,j}\}_1^k\right) \quad j = 1, 2, \ldots, k$

($k$: تعداد معادلات)

$f_1 = y_2$

$f_2 = 8x - 64y_1$




$$y_1(0.1) = y_1(0) + h\,f_1(0, 0.1, 2)$$
$$= 0.1 + 0.1\,[2] = 0.3$$

$$y_2(0.1) = y_2(0) + h\,f_2(0, 0.1, 2)$$
$$= 2 + 0.1\,[8 \times 0 - 64 \times 0.1] = 1.36$$

$$y_1(0.2) = y_1(0.1) + h\,f_1(0.1, 0.3, 1.36)$$
$$= 0.3 + 0.1\,[1.36] = 0.436 \checkmark$$

$$y_2(0.2) = y_2(0.1) + h\,f_2(0.1, 0.3, 1.36)$$
$$= 1.36 + 0.1\,[8 \times 0.1 - 64 \times 0.3] = -0.48 \checkmark$$

مثال: با استفاده از روش R-K-2 دستگاه دو معادله زیر را حل نمایید:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 & y_1(0) = 0.1 & h = 0.1 \\ & & y_1(0.2) = ? \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 8x - 64y_1 & y_2(0) = 2 & y_2(0.2) = ? \end{cases}$$

$$R\text{-}K\text{-}2 \longrightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + h, y_i + k_1)$$

برای حل دستگاه معادلات $\longrightarrow$

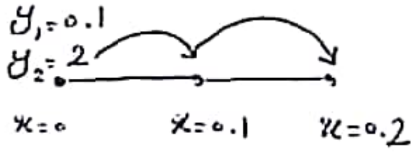
$$y_{i+1,j} = y_{i,j} + \frac{1}{2}(k_{1,j} + k_{2,j}) \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

$$k_{1,j} = h f_j(x_i, \{y_{i,j}\}_1^k)$$

$$k_{2,j} = h f_j(x_i + h, \{y_{i,j} + k_{1,j}\}_1^k)$$

$$f_1 = y_2$$

$$f_2 = 8x - 64y_1$$




گام اول

$$k_{1,1} = h f_1(0, 0.1, 2) = 0.1 \times 2 = 0.2$$

$$k_{1,2} = h f_2(0, 0.1, 2) = 0.1[8 \times 0 - 64 \times 0.1] = -0.64$$

$$k_{2,1} = h f_1(0 + 0.1, 0.1 + 0.2, 2 - 0.64)$$
$$= 0.1 \times 1.36 = 0.136$$

$$k_{2,2} = h f_2(0 + 0.1, 0.1 + 0.2, 2 - 0.64)$$
$$= 0.1[8 \times 0.1 - 64 \times 0.3] = -1.84$$

$$y_1(0.1) = y_1(0) + \frac{1}{2}(k_{1,1} + k_{2,1})$$
$$= 0.1 + \frac{1}{2}(0.2 + 0.136) = 0.268$$

$$y_2(0.1) = y_2(0) + \frac{1}{2}(k_{1,2} + k_{2,2})$$
$$= 2 + \frac{1}{2}(-0.64 - 1.84) = 0.76$$

ثاني مرة

$$k_{1,1} = h f_1(0.1, 0.268, 0.76) = 0.1 \times 0.76 = 0.076$$

$$k_{1,2} = h f_2(0.1, 0.268, 0.76) = 0.1[8 \times 0.1 - 64 \times 0.268] = -1.6352$$

$$k_{2,1} = h f_1(0.1 + 0.1, 0.268 + 0.076, 0.76 - 1.6352)$$
$$= 0.1 \times (-0.8752) = -0.08752$$

$$k_{2,2} = h f_2(0.1 + 0.1, 0.268 + 0.076, 0.76 - 1.6352)$$
$$= 0.1[8 \times 0.2 - 64 \times 0.344] = -2.0416$$

$$y_1(0.2) = y_1(0.1) + \frac{1}{2}(k_{1,1} + k_{2,1})$$
$$= 0.268 + \frac{1}{2}(0.076 - 0.08752) = 0.26224 \checkmark$$

$$y_2(0.2) = y_2(0.1) + \frac{1}{2}(k_{1,2} + k_{2,2})$$
$$= 0.76 + \frac{1}{2}(-1.6352 - 2.0416) = -1.0784 \checkmark$$

# حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام :

مرتبه معادله دیفرانسیل بالاترین درجه مشتق موجود در معادله است.

چنانچه فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام بصورت زیر باشد :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

آنگاه با تغییر متغیر زیر می توان معادله دیفرانسیل مرتبه n را به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل نمود:

تغییر متغیر $y = z_1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz_1}{dx} = z_2 \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz_2}{dx} = z_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dz_n}{dx}$

دراینصورت دستگاه n معادله دیفرانسیل بصورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \vdots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}) \end{cases}$$

باید توجه داشت که تغییر متغیر باید بر روی شرایط اولیه مسئله نیز اعمال گردد.

مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش اویلر حل نمایید :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 64y = 8x \\ y(0) = 0.1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} h = 0.1 \\ y(0.2) = ? \end{array}$$

تغییر متغیر $\quad y = z_1 \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 \longrightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz_2}{dx}$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 & z_1(0) = 0.1 \\ \dfrac{dz_2}{dx} + 64z_1 = 8x & z_2(0) = 2 \end{cases}$$

که دستگاه معادلات حاصل در بخش قبلی حل شده است.

# حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

## مسائل مقدار مرزی:

در این گونه مسائل علاوه بر معادله دیفرانسیل (دارای حداقل مرتبه دوم) اطلاعاتی درباره مرزهای مسئله در دسترس است که به آن شرایط مرزی می گویند.

برای حل مسائل مقدار مرزی از دو روش زیر می توان استفاده نمود:

۱- روش شوتینگ (Shooting Method)

۲- روش اختلاف محدود (Finite Difference Method)

### - روش شوتینگ

مبنای محاسبات در این روش بصورت حدس و خطا می باشد. در این روش با حدس اولیه می توان معادلات شرایط مرزی را به معادلات شرایط اولیه تبدیل نمود. با استفاده از حدس اولیه، معادله را حل نموده و مقادیر بدست آمده در مرز انتهایی را با مقادیر مربوط به این مرز در صورت مسئله مقایسه می نمائیم. از روی اختلاف این دو مقدار، حدس بعدی را زده تا بالاخره جواب مورد نظر حاصل شود. در بیشتر مسائل که معادلات بصورت خطی هستند با دو حدس می توان به نتیجه رسید.

مثال: با استفاده از روش شوتینگ و بکارگیری روش R-K-4 معادله دیفرانسیل زیر

را حل نموده و مقادیر $y$ را در نقاط معین شده بدست آورید:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -0.4 \end{cases} \qquad \Delta x = 0.1$$

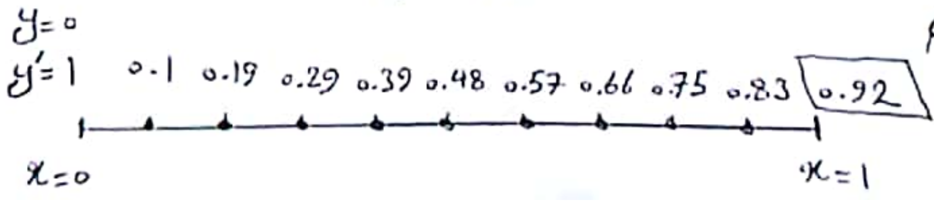

جواب: برای تبدیل مسئله از مقدار مرزی به مقدار اولیه ابتدا می بایست برای مشتق در نقطه $x=0$ مقداری حدس زد. پس با تغییر متغیر، معادله مرتبه دوم را به دو معادله مرتبه یک تبدیل نموده و با استفاده از روش R-K-4 مقادیر $y$ را در تمامی نقاط بدست آورد. چنانچه اختلاف بین $y$ محاسبه شده در $x=1$ با مقدار داده شده در صورت مسئله ناچیز باشد حدس اولیه صحیح بوده و محاسبات به پایان می رسد در غیر اینصورت حدس دیگری انتخاب می شود و محاسبات تکرار می گردد.

حدس اول $\quad y'(0) = 1$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 & z_1(0) = 0 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = -z_1 + x^2 & z_2(0) = 1 \end{cases}$$

حل دستگاه با R-K-4




$y(1) = 0.92$ X

حدس دوم $y'(0) = -1$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 & z_1(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = -z_1 + x^2 & z_2(0) = -1 \end{cases}$$

حل دستگاه با R-K-4

$y = 0$   $-0.19$   $-0.38$   $-0.55$   $-0.68$   $\boxed{-0.76}$

$y' = -1$   $-0.1$   $-0.29$   $-0.47$   $-0.62$   $-0.73$

$x = 0$     $x = 1$

$y(1) = -0.76$ X

برای حدس سوم $y'(0)$ از میانیابی استفاده می‌کنیم

| $y'(0)$ | $y(1)$ |
|---|---|
| 1 | 0.92 |
| ? | -0.4 |
| -1 | -0.76 |

$\xrightarrow{\text{میانیابی}} y'(0) = -0.57$

حدس سوم $y'(0) = -0.57$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 & z_1(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = -z_1 + x^2 & z_2(0) = -0.57 \end{cases}$$

حل دستگاه با R-K-4

$y = 0$   $-0.056$   $-0.16$   $-0.27$   $-0.34$   $-0.39$

$y' = -0.57$   $-0.11$   $-0.22$   $-0.31$   $-0.37$   $\boxed{-0.4}$

$x = 0$     $x = 1$

$y(1) = -0.4$ ✓

- روش اختلاف محدود

در این روش کلیه عبارات مشتق موجود در معادله دیفرانسیل و یا شرایط مرزی برحسب معادل پیشرو، پسرو و یا مرکزی نوشته می شود (معمولاً مرکزی) محاسبات در این روش به ترتیب زیر است:

۱- ابتدا هندسه مسئله با توجه به فاصله میان متغیر مستقل گره بندی شده و گسسته می گردد. گره های ایجاد شده شماره گذاری می شود.

۲- معادله دیفرانسیل و یا در صورت لزوم شرایط مرزی با استفاده از فرم معادل مشتقات پیشرو، پسرو و یا مرکزی گسسته می گردد. با جایگذاری این عبارات به جای مشتق های موجود در معادله، معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری تبدیل می شود.

۳- معادله جبری را با توجه به شماره گره ها برای تمامی آنها نوشته تا به تعداد گره های مجهول معادله ایجاد شود.

۴- تأثیر شرایط مرزی را در معادلات اعمال می نمائیم.

۵- دستگاه معادلات جبری حاصل را حل نموده تا مقادیر مجهول در هر گره بدست آید.

مثال: با استفاده از روش اختلاف محدود معادله دیفرانسیل مقدار مرزی زیر را حل نموده و مقادیر مجهول را در نقاط مشخص شده تعیین نمائید:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -0.4 \end{cases} \qquad \Delta x = 0.2$$

| $y_0=0$ | ? | ? | ? | ? | $y_5=-0.4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x=0$ | | | | | $x=1$ |

پس از گسسته سازی هندسه مسئله، با استفاده از فرم مرکزی مشتقات معادله را گسسته می نمائیم:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\xrightarrow{\text{جانگذاری در ODE}} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + y_i = x_i^2 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Delta x = 0.2 \longrightarrow \boxed{25y_{i+1} - 49y_i + 25y_{i-1} = x_i^2}$$

در ادامه معادله جبری حاصل را برای تمامی گره های مجهول می نویسیم:

$$i=1 \qquad 25y_2 - 49y_1 + 25y_0 = (0.2)^2$$

$$i=2 \qquad 25y_3 - 49y_2 + 25y_1 = (0.4)^2$$

$$i=3 \qquad 25y_4 - 49y_3 + 25y_2 = (0.6)^2$$

$$i=4 \qquad 25y_5 - 49y_4 + 25y_3 = (0.8)^2$$

چنانچه شرایط مرزی اعمال شود و معادلات بصورت ماتریس نوشته شود خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -49 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & -49 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & -49 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.16 \\ 0.36 \\ 10.64 \end{bmatrix}$$

که جواب این دستگاه معادلات برابر است با:

$y_1 = -0.113 \qquad y_2 = -0.220 \qquad y_3 = -0.311 \qquad y_4 = -0.376$

تمرین: تغییرات دما در حالت یکنواخت و بصورت یک بعدی به شرح زیر داده شده است:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} - 4T^2 = 0 \\[2ex] \left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 2.35 \\[2ex] \left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=1} = 20.04 \end{cases} \qquad \Delta x = 0.25$$

با استفاده از روش شوتینگ و اختلاف محدود معادله را حل نمائید.

* در محاسبات شوتینگ از روش اولر استفاده نمائید.

# حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی (پاره‌ای)

معادله دیفرانسیلی که دارای بیش از یک متغیر مستقل باشد یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای است و دارای عبارات مشتق جزئی خواهد بود

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \ldots$$

طبقه بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

۱- بر مبنای رتبه معادله

بالاترین رتبه مشتق موجود در معادله را رتبه معادله دیفرانسیل می‌نامند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ رتبه اول

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ رتبه دوم

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ رتبه سوم

## ۲- بررسی خطی و غیرخطی بودن

برای نمونه معادله عمومی مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a(X)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(X) = 0$$

معادله خطی: ضرایب معادله ثابت و یا تابعی از متغیر مستقل

$$(X) \equiv (x, y)$$

معادله شبه خطی: ضرایب معادله تابعی از متغیر وابسته و یا مشتقات با مرتبه کمتر از مرتبه معادله

$$(X) \equiv \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

معادله غیرخطی: ضرایب معادله تابعی از مشتقات هم‌مرتبه معادله

$$(X) \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

طبقه‌بندی معادلات خطی دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0$$

$B^2-4AC>0$ Hyperbolic هذلولی

$B^2-4AC=0$ Parabolic سهموی

$B^2-4AC<0$ Elliptic بیضوی

$G=0$ معادله همگن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله موج (هذلولی)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ نفوذ یک بعدی ناپایدار (سهموی)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ معادله لاپلاس (بیضوی)

حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای:

در علوم مهندسی از سه روش مختلف عددی برای حل PDE استفاده می‌شود:

۱- روش اختلاف محدود Finite Difference

۲- روش المان محدود Finite Element

۳- روش حجم محدود Finite Volume

که در این درس به تشریح روش اختلاف محدود پرداخته می‌شود.

روش اختلاف محدود:

از این روش در حل معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) از نوع مقدار مرزی (BVP) استفاده شد.
مراحل حل معادله به این روش مشابه مراحل گفته شده در مسائل مقدار مرزی ODE است. البته باید توجه نمود که در مسائل PDE هر مسئله دارای حداقل دو بعد می‌باشد و بنابراین در شماره‌گذاری و همینطور گسسته‌سازی مسئله باید به این امر توجه نمود.

$u^{n}_{i,j,k}$ ← متغیر وابسته

i: شماره گره در جهت x

j: 〃 〃 〃 y

k: 〃 〃 〃 z

n: 〃 〃 بعد زمان (t)

نمونه‌ای از روابط مشتق عددی جهت گسسته سازی معادلات

— اختلافات مرکزی

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{2\Delta x}\left(u^{n}_{i+1,j,k} - u^{n}_{i-1,j,k}\right), O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{2\Delta y}\left(u^{n}_{i,j+1,k} - u^{n}_{i,j-1,k}\right), O(\Delta y^2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{2\Delta z}\left(u^{n}_{i,j,k+1} - u^{n}_{i,j,k-1}\right), O(\Delta z^2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{2\Delta t}\left(u^{n+1}_{i,j,k} - u^{n-1}_{i,j,k}\right), O(\Delta t^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u^{n}_{i+1,j,k} - 2u^{n}_{i,j,k} + u^{n}_{i-1,j,k}\right), O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta y^2}\left(u^{n}_{i,j+1,k} - 2u^{n}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j-1,k}\right), O(\Delta y^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta z^2}\left(u^{n}_{i,j,k+1} - 2u^{n}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j,k-1}\right), O(\Delta z^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u^{n+1}_{i,j,k} - 2u^{n}_{i,j,k} + u^{n-1}_{i,j,k}\right), O(\Delta t^2)$$

— اختلافات پیش‌رو

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta x}\left(u_{i+1,j,k}^{n} - u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta y}\left(u_{i,j+1,k}^{n} - u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta z}\left(u_{i,j,k+1}^{n} - u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta z)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+2,j,k}^{n} - 2u_{i+1,j,k}^{n} + u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+2,k}^{n} - 2u_{i,j+1,k}^{n} + u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta y)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta z^2}\left(u_{i,j,k+2}^{n} - 2u_{i,j,k+1}^{n} + u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta z)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i,j,k}^{n+2} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^{n}\right), O(\Delta t)$$

اختلافات پسرو

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta x}\left(u_{i,j,k}^{n} - u_{i-1,j,k}^{n}\right), O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta y}\left(u_{i,j,k}^{n} - u_{i,j-1,k}^{n}\right), O(\Delta y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta z}\left(u_{i,j,k}^{n} - u_{i,j,k-1}^{n}\right), O(\Delta z)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{i,j,k}^{n} - u_{i,j,k}^{n-1}\right), O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i,j,k}^{n} - 2u_{i-1,j,k}^{n} + u_{i-2,j,k}^{n}\right), O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j,k}^{n} - 2u_{i,j-1,k}^{n} + u_{i,j-2,k}^{n}\right), O(\Delta y)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta z^2}\left(u_{i,j,k}^{n} - 2u_{i,j,k-1}^{n} + u_{i,j,k-2}^{n}\right), O(\Delta z)$$

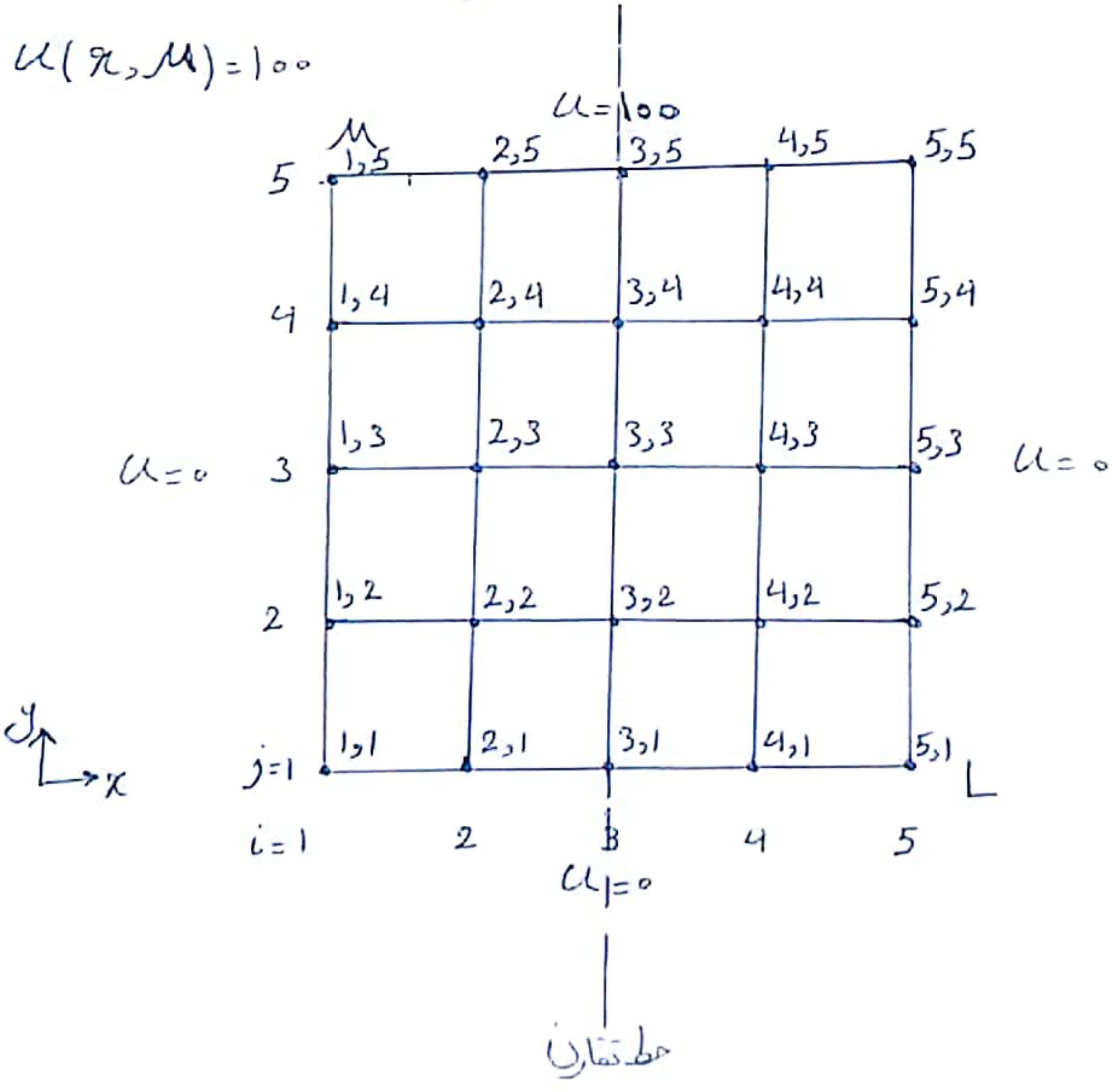
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i,j,k}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n-1} + u_{i,j,k}^{n-2}\right), O(\Delta t)$$

حل معادلات بیضوی:

با یک مثال روش حل این معادلات تشریح می گردد.

مثال: با استفاده از روش اختلاف محدود معادله لاپلاس دو بعدی زیر را با شرایط مرزی مشخص شده حل نمایید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0,y) = u(x,0) = u(L,y) = 0 \\ u(x,M) = 100 \end{cases} \qquad \Delta x = \Delta y = \frac{L}{4} = \frac{M}{4}$$



پس از گسسته سازی و گره بندی هندسه مسئله، از فرم اختلافات مرکزی برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

اختلافات مرکزی را در معادله جایگزین می کنیم:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \longrightarrow \boxed{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0} \qquad \begin{matrix} i=2,3,4 \\ j=2,3,4 \end{matrix}$$

حال فرم گسسته معادله را برای تک تک گره های مجهول اعمال می کنیم:

$$i=2 \quad j=2 \qquad u_{3,2} + \cancel{u_{1,2}} + u_{2,3} + \cancel{u_{2,1}} - 4u_{2,2} = 0$$

$$j=3 \qquad u_{3,3} + \cancel{u_{1,3}} + u_{2,4} + u_{2,2} - 4u_{2,3} = 0$$

$$j=4 \qquad u_{3,4} + \cancel{u_{1,4}} + \overset{100}{\cancel{u_{2,5}}} + u_{2,3} - 4u_{2,4} = 0$$

$$i=3 \quad j=2 \qquad u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + \cancel{u_{3,1}} - 4u_{3,2} = 0$$

$$j=3 \qquad u_{4,3} + u_{2,3} + u_{3,4} + u_{3,2} - 4u_{3,3} = 0$$

$$j=4 \qquad u_{4,4} + u_{2,4} + \overset{100}{\cancel{u_{3,5}}} + u_{3,3} - 4u_{3,4} = 0$$

نیازی به اعمال معادله برای سه گره دیگر نیست و از تقارن در مسئله استفاده می کنیم

$u_{4,4} = u_{2,4}$ $\qquad$ $u_{4,3} = u_{2,3}$ $\qquad$ $u_{4,2} = u_{2,2}$

پس شرایط مرزی و تقارن را در معادلات جایگزین کرده و دستگاه معادلات حاصل را حل می نماییم:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \\ u_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$u_{2,2} = 7.14$ $\qquad$ $u_{3,2} = 9.82$

$u_{2,3} = 18.75$ $\qquad$ $u_{3,3} = 25$

$u_{2,4} = 42.85$ $\qquad$ $u_{3,4} = 52.68$

HW : معادله دیفرانسیل پاره‌ای ناهمگن زیر را به روش اختلاف محدود حل نمایید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \\ u(0,y) = u(x,0) = u(L,y) = u(x,M) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \Delta y = \frac{L}{4} = \frac{M}{4} = 0.5$$

## حل معادلات سهموی:

در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از نوع سهموی معمولاً بعد زمان نیز در معادله وجود دارد.

برای حل اینگونه معادلات از دو روش صریح و یا ضمنی می‌توان استفاده نمود.

۱- روش صریح (Explicit Method)

در این روش برای گسسته‌سازی مشتق جزئی برحسب زمان از فرم اختلاف پیشرو و برای مشتق جزئی برحسب مکان از فرم اختلاف مرکزی (در تراز زمانی n) استفاده می‌شود.

مثال: فرم گسسته معادله زیر را به روش صریح تعیین نمائید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

اختلاف پیشرو $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n \doteq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$

اختلاف مرکزی $\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \qquad \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \lambda$$

$$\boxed{u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1-2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i-1}^n}$$

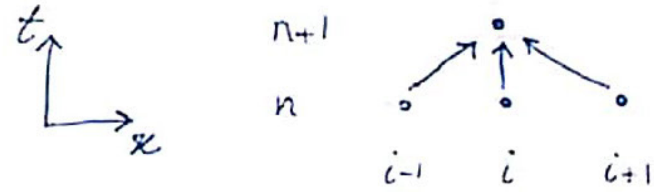
مثال: معادله دیفرانسیل زیر را به روش اختلاف محدود صریح حل نمایید

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 100 \\ u(1,t) = 100 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta x = 0.2$

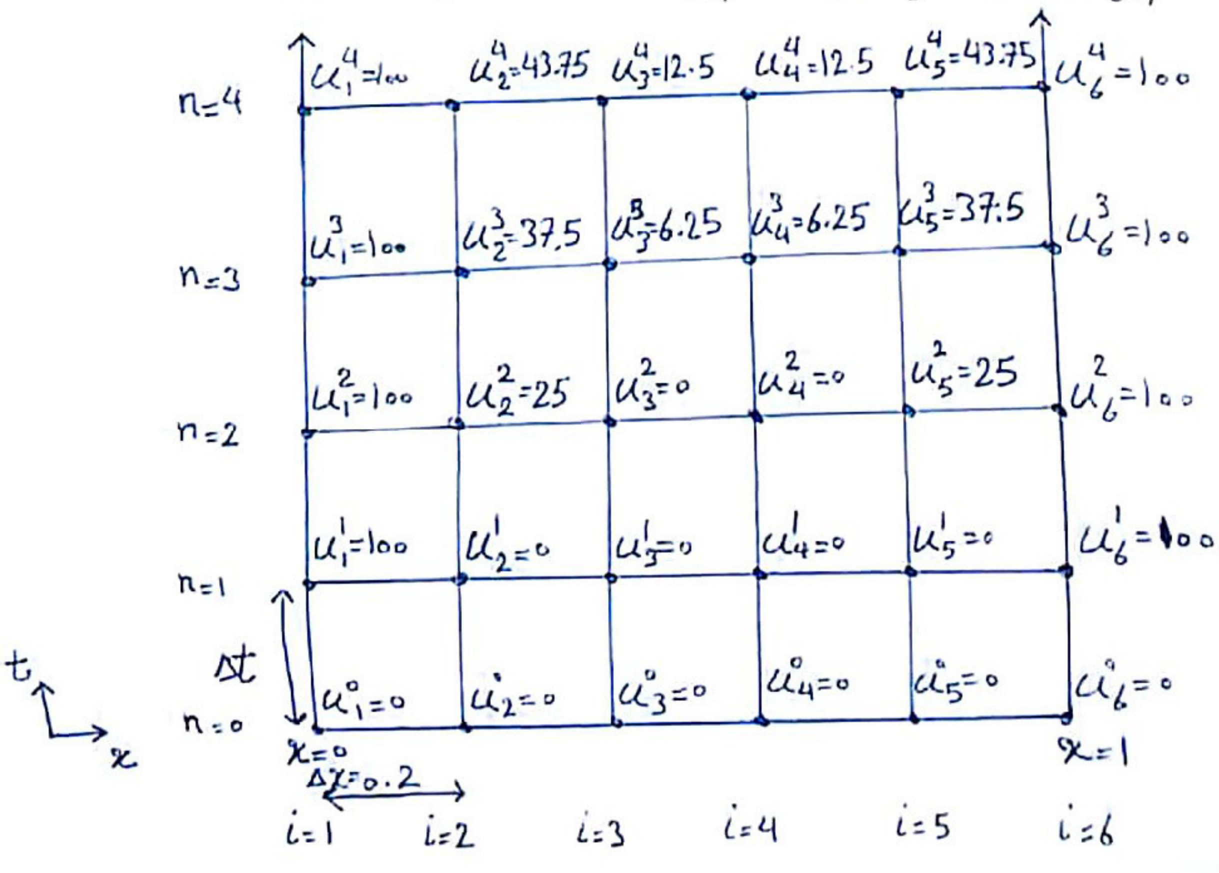
$\lambda = 0.25$

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1-2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i-1}^n$$




فرم گسسته این معادله نشان می دهد
برای تعیین مقادیر u در هر گره زمانی
بعدی باید از مقادیر u در گره زمانی قبل
از آن استفاده نمود.

$$\lambda = 0.25 \rightarrow u_i^{n+1} = 0.25\, u_{i+1}^n + 0.5\, u_i^n + 0.25\, u_{i-1}^n$$



حال چنانچه مثال قبل را با $\lambda=1$ حل نماییم خواهیم داشت:

$$\lambda=1 \longrightarrow u_i^{n+1}=u_{i+1}^n-u_i^n+u_{i-1}^n$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=4$ | $u_1^4=100$ | $u_2^4=200$ | $u_3^4=0$ | $u_4^4=0$ | $u_5^4=200$ | $u_6^4=100$ |
| $n=3$ | $u_1^3=100$ | $u_2^3=0$ | $u_3^3=100$ | $u_4^3=100$ | $u_5^3=0$ | $u_6^3=100$ |
| $n=2$ | $u_1^2=100$ | $u_2^2=100$ | $u_3^2=0$ | $u_4^2=0$ | $u_5^2=100$ | $u_6^2=100$ |
| $n=1$ | $u_1^1=100$ | $u_2^1=0$ | $u_3^1=0$ | $u_4^1=0$ | $u_5^1=0$ | $u_6^1=100$ |
| $n=0$ | $u_1^0=0$ | $u_2^0=0$ | $u_3^0=0$ | $u_4^0=0$ | $u_5^0=0$ | $u_6^0=0$ |
| | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=5$ | $i=6$ |

نتایج نشان می‌دهد که مقادیر $u$ از نظر فیزیکی قابل قبول نمی‌باشد. لذا مشخص می‌شود که در روش صریح نمی‌توان هر مقداری را برای $\lambda$ در نظر گرفت. در شرایطی که $\lambda=1$ است جواب‌های بدست آمده دارای ناپایداری است.

شرط پایداری معادلات سهموی:

چنانچه فرم گسسته معادله بصورت $u_i^{n+1}=Au_{i+1}^n+Bu_i^n+Cu_{i-1}^n$ باشد جواب معادله در صورتی پایدار است که:

$$\text{قاعده مثبت} \longrightarrow \begin{cases} A, B, C > 0 \\ A+B+C \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین شرط پایداری مسئله حل شده بصورت $\lambda \leq \frac{1}{2}$ می‌باشد.

## ۲- روش ضمنی (Implicit Method)

در این روش جهت گسسته سازی معادله دیفرانسیل از اختلاف پیشرو برای عبارت مشتق نسبت به زمان و از اختلاف مرکزی (در گره زمانی $n+1$) برای عبارت مشتق نسبت به مکان استفاده می شود. این روش همواره پایدار است.

بطور مثال برای معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ خواهیم داشت:

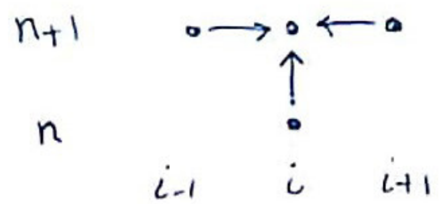
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n=\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n=\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\longrightarrow \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}=\lambda$$

$$\boxed{-\lambda u_{i-1}^{n+1}+(1+2\lambda)u_i^{n+1}-\lambda u_{i+1}^{n+1}=u_i^n}$$

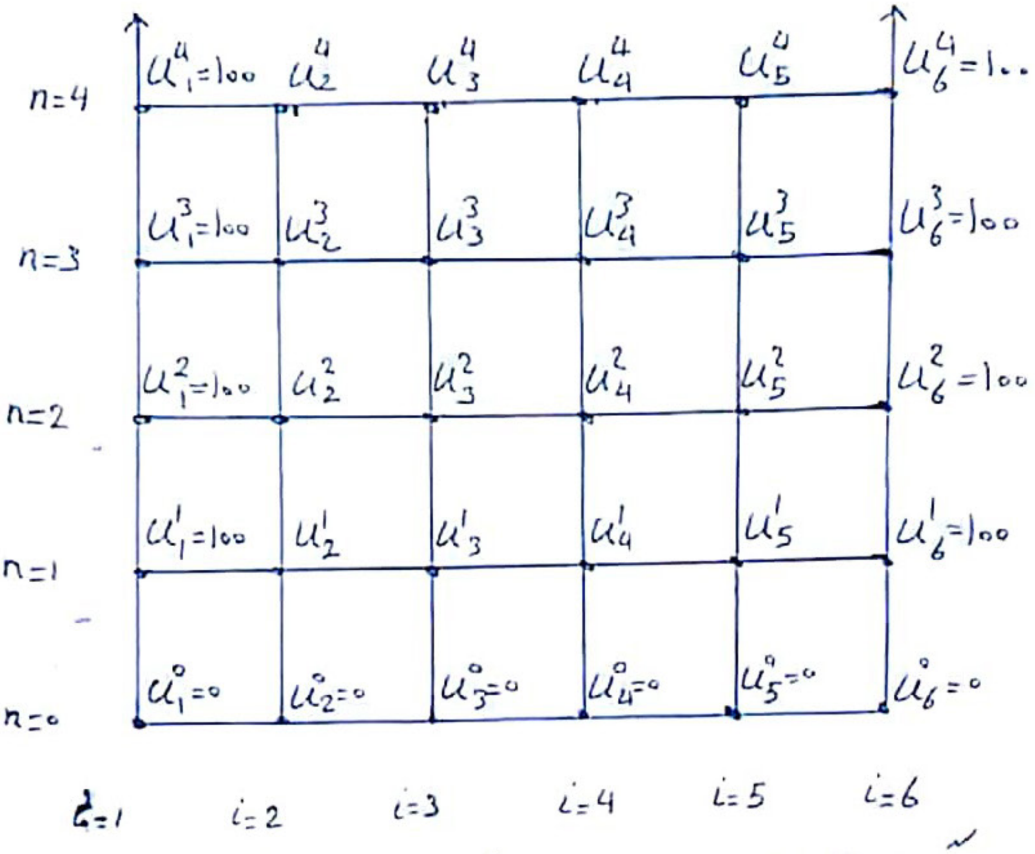
فرم گسسته معادله بیانگر آن است که برای محاسبه $u_i^{n+1}$ باید از مقادیر گره های همجوار در گره های زمانی $n+1$ نیز استفاده نمود.




بنابراین بدلیل آنکه مقادیر $u$ در گره زمانی $n+1$ مجهول می باشد لذا باید برای محاسبه مقادیر $u$ در گره $n+1$ یک دستگاه معادلات ایجاد نمود.

مثال قبل را به روش ضمنی حل می نمائیم.

$$\lambda = 0.25 \longrightarrow -0.25\,u_{i-1}^{n+1} + 1.5\,u_i^{n+1} - 0.25\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$




پس از گره بندی، فرم گسسته معادله را برای گام زمانی اول که شامل ۴ مجهول است می نویسیم.

$$n+1=1 \qquad \begin{cases} i=2 & -0.25\,\overset{100}{\cancel{u_1^1}} + 1.5\,u_2^1 - 0.25\,u_3^1 = \cancel{u_2^0} \\ i=3 & -0.25\,u_2^1 + 1.5\,u_3^1 - 0.25\,u_4^1 = \cancel{u_3^0} \\ i=4 & -0.25\,u_3^1 + 1.5\,u_4^1 - 0.25\,u_5^1 = \cancel{u_4^0} \\ i=5 & -0.25\,u_4^1 + 1.5\,u_5^1 - 0.25\,\overset{100}{\cancel{u_6^1}} = \cancel{u_5^0} \end{cases}$$

$u_2^1 = 17.2 \qquad u_3^1 = 3.4 \qquad u_4^1 = 3.4 \qquad u_5^1 = 17.2$

ضمنی

$n+1=2$ 　 $i=2$ 　 $-0.25\overset{100}{\cancel{u_1^2}}+1.5u_2^2-0.25u_3^2=\overset{17.2}{\cancel{u_2^1}}$

$i=3$ 　 $-0.25u_2^2+1.5u_3^2-0.25u_4^2=\overset{3.4}{\cancel{u_3^1}}$

$i=4$ 　 $-0.25u_3^2+1.5u_4^2-0.25u_5^2=\overset{3.4}{\cancel{u_4^1}}$

$i=5$ 　 $-0.25u_4^2+1.5u_5^2-0.25\overset{100}{\cancel{u_6^2}}=\overset{17.2}{\cancel{u_5^1}}$

$u_2^2=29.6$ 　 $u_3^2=8.7$ 　 $u_4^2=8.7$ 　 $u_5^2=29.6$

$n+1=3$ 　 $i=2$ 　 $-0.25\overset{100}{\cancel{u_1^3}}+1.5u_2^3-0.25u_3^3=\overset{29.6}{\cancel{u_2^2}}$

$i=3$ 　 $-0.25u_2^3+1.5u_3^3-0.25u_4^3=\overset{8.7}{\cancel{u_3^2}}$

$i=4$ 　 $-0.25u_3^3+1.5u_4^3-0.25u_5^3=\overset{8.7}{\cancel{u_4^2}}$

$i=5$ 　 $-0.25u_4^3+1.5u_5^3-0.25\overset{100}{\cancel{u_6^3}}=\overset{29.6}{\cancel{u_5^2}}$

$u_2^3=38.8$ 　 $u_3^3=14.7$ 　 $u_4^3=14.7$ 　 $u_5^3=38.8$

$n+1=4$ 　 $i=2$ 　 $-0.25\overset{100}{\cancel{u_1^4}}+1.5u_2^4-0.25u_3^4=\overset{38.8}{\cancel{u_2^3}}$

$i=3$ 　 $-0.25u_2^4+1.5u_3^4-0.25u_4^4=\overset{14.7}{\cancel{u_3^3}}$

$i=4$ 　 $-0.25u_3^4+1.5u_4^4-0.25u_5^4=\overset{14.7}{\cancel{u_4^3}}$

$i=5$ 　 $-0.25u_4^4+1.5u_5^4-0.25\overset{100}{\cancel{u_6^4}}=\overset{38.8}{\cancel{u_5^3}}$

$u_2^4=46.1$ 　 $u_3^4=20.9$ 　 $u_4^4=20.9$ 　 $u_5^4=46.1$

روش میانگین کرانک - نیکلسون (Crank-Nicolson Method)

در این روش از پارامتر $\theta$ برای تعیین میزان تأثیر ترم‌های زمانی $n$ و $n+1$ استفاده می‌شود. بطور مثال در معادله سهموی زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n = \alpha \left[ \theta \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^{n+1} + (1-\theta) \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n \right]$$

روش صریح $\theta = 0$

" ضمنی $\theta = 1$

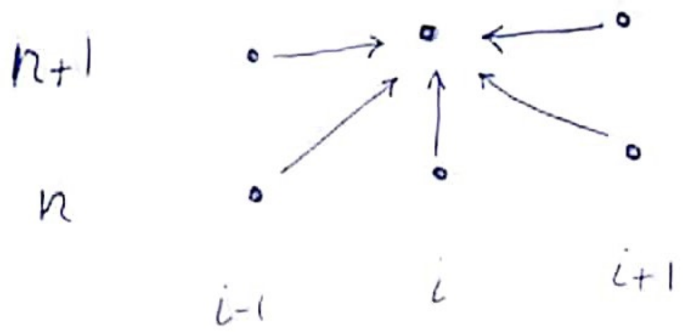
" کرانک-نیکلسون $\theta = \frac{1}{2}$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{\theta}{\Delta x^2} \left( u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} \right) \right] +$$

$$\alpha \left[ \frac{1-\theta}{\Delta x^2} \left( u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right) \right]$$

$$\theta = \frac{1}{2} \rightarrow (1+\lambda) u_i^{n+1} - \frac{\lambda}{2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{\lambda}{2} u_{i-1}^{n+1} = (1-\lambda) u_i^n + \frac{\lambda}{2} u_{i+1}^n + \frac{\lambda}{2} u_{i-1}^n$$

* این روش همواره پایدار است.




مثال: معادله زیر را با استفاده از روش کرانک-نیکلسون حل نمایید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

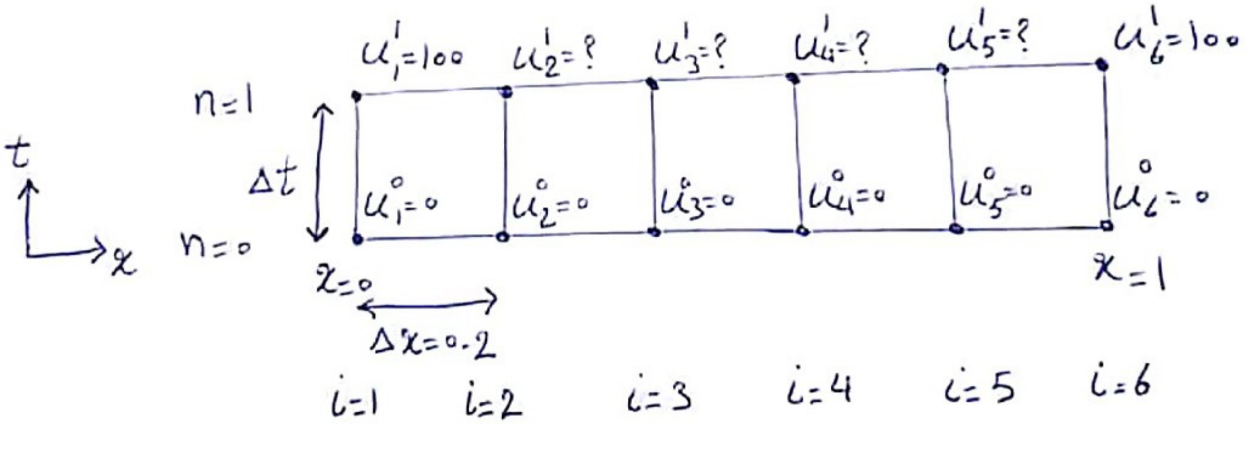
$\Delta x = 0.2$

$\lambda = 0.25$

$u(0,t) = 100$

$u(1,t) = 100$

$u(x,0) = 0$




$$\lambda = 0.25 \longrightarrow (1+0.25)u_i^{n+1} - \frac{0.25}{2}u_{i+1}^{n+1} - \frac{0.25}{2}u_{i-1}^{n+1} =$$

$$(1-0.25)u_i^n + \frac{0.25}{2}u_{i+1}^n + \frac{0.25}{2}u_{i-1}^n$$

در گام زمان $t=\Delta t$

$$n+1=1 \quad i=2 \quad 1.25u_2^1-0.125u_3^1-0.125\overset{100}{u_1^1}=0.75u_2^0+0.125u_3^0+0.125u_1^0$$

$$i=3 \quad 1.25u_3^1-0.125u_4^1-0.125u_2^1=0.75u_3^0+0.125u_4^0+0.125u_2^0$$

$$i=4 \quad 1.25u_4^1-0.125u_5^1-0.125u_3^1=0.75u_4^0+0.125u_5^0+0.125u_3^0$$

$$i=5 \quad 1.25u_5^1-0.125\overset{100}{u_6^1}-0.125u_4^1=0.75u_5^0+0.125u_6^0+0.125u_4^0$$

با حل ۴ معادله بالا مقادیر $u$ در گره‌های مورد نظر تعیین می‌گردد:

$$u_2^1=10.11 \quad u_3^1=1.12 \quad u_4^1=1.12 \quad u_5^1=10.11$$

Hw : مقادیر $u$ را در $t=2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$ برای مثال بالا بدست آورید.