① مقدمه‌ای بر انتقال گرما (جلد اول)

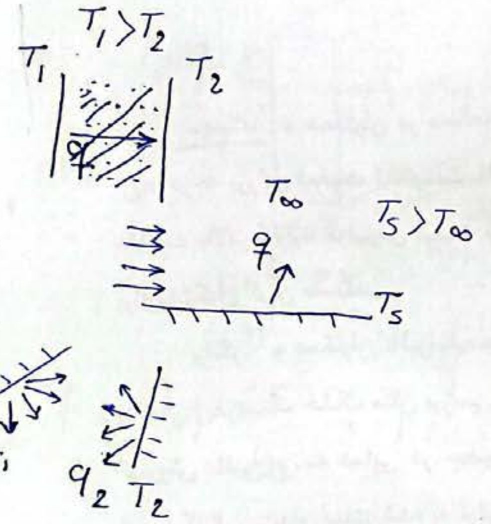
Introduction to Heat Transfer

by: Frank P. Incropera
David P. DeWitt

انتقال گرما چیست؟ انرژی در جریان بدلیل وجود اختلاف دما

در علم ترمودینامیک آموختیم که انرژی می‌تواند در اثر اندرکنش‌های یک سیستم با محیطش انتقال یابد. این اندرکنش‌ها کار و گرما نام دارد.

عامل انتقال انرژی < کار / گرما



شیوه‌های انتقال گرما

۱- رسانایی (هدایت) Conduction

۲- جابه‌جایی (همرفت) Convection

۳- تابش گرمایی (تشعشع) Thermal Radiation

- رسانایی (هدایت)

مکانیزم هدایت گرمایی در مواد و اجسام ساکن ناشی از انتقال انرژی از مولکول‌ها و اتم‌ها و ذرات پرانرژی‌تر به کم‌انرژی‌تر است.

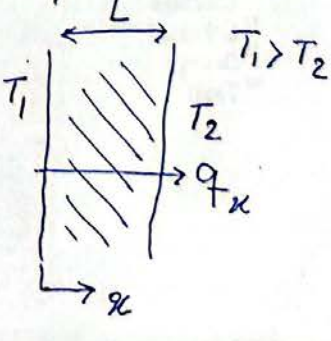
برای محاسبه مقدار انتقال انرژی بر واحد زمان (نرخ انتقال انرژی گرما) بواسطه رسانایی گرمایی از معادله‌ای به نام قانون فوریه استفاده می‌کنیم:

$$q_x = -KA\frac{dT}{dx} \quad (W)$$

q_x: نرخ انتقال گرما در جهت x

k: ضریب رسانایی گرمایی $(\frac{W}{m.K})$

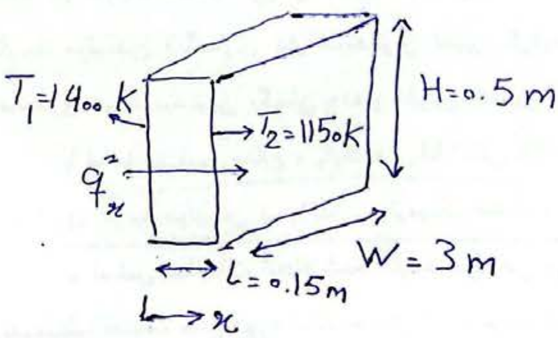
A: سطح عمود بر جهت انتقال حرارت (m^2)



$q'' = -k\dfrac{dT}{dx}$ $\left(\dfrac{W}{m^2}\right)$ شار گرمایی : q'' Heat Flux

شار گرمایی عبارت است از نرخ انتقال گرما بر واحد سطح عمود بر جهت انتقال

مثال: دیوار یک کوره صنعتی با ضخامت $0.15\ m$ از آجر نسوز با ضریب رسانایی $1.7\ \frac{W}{m.K}$ ساخته شده است. اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که دمای سطح درونی و بیرونی کوره به ترتیب $1400\ K$ و $1150\ K$ است. نرخ انتقال گرما از دیوار با طول $3m$ و ارتفاع $0.5m$ چقدر است؟



$$q = -k\overset{W\cdot H}{A}\frac{dT}{dx} = -kA\frac{\Delta T}{L} = -1.7\times 3\times 0.5\times\frac{1150-1400}{0.15} = 4250\ W$$

ــ جابه‌جایی

انتقال گرمای جابه‌جایی از دو مکانیزم تشکیل شده است یعنی علاوه بر انتقال انرژی توسط حرکت تصادفی مولکولی، حرکت توده سیال نیز در انتقال انرژی سهم دارد.

فرآیندهای انتقال گرمای جابه‌جایی:

- جابه‌جایی اجباری — Forced convection
- " آزاد (طبیعی) — Free(Natural) convection
- جوشش و میعان — Boiling and condensation

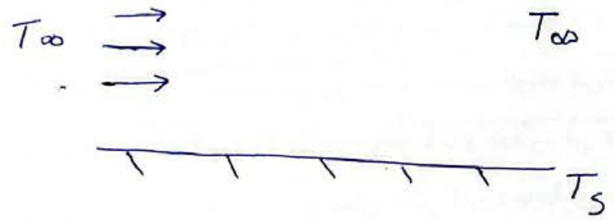
نرخ انتقال گرما بواسطه جابه‌جایی را می‌توان بوسیله قانون سرمایش نیوتن محاسبه نمود:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

h: ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $\left(\frac{W}{m^2 . K}\right)$

T_s: دمای سطح

T_∞: دمای سیال

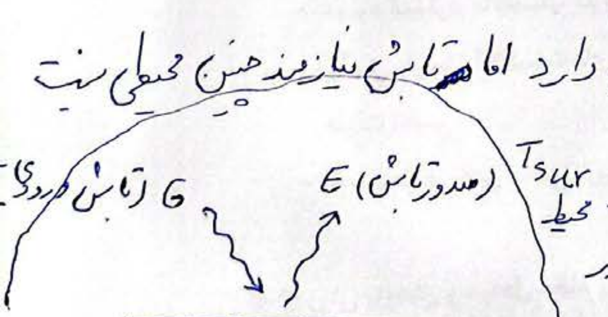


	$h\left(\frac{W}{m^2 . K}\right)$
جابه‌جایی آزاد	
گازها	2-25
مایعات	50-1000
جابه‌جایی اجباری	
گازها	25-250
مایعات	50-20,000
جوشش و میعان	2500-100,000

— تابش (تشعشع)

- تابش گرمایی بوسیله امواج الکترومغناطیسی نوعی انرژی است که از ماده ای با دمای معین صادر می‌شود.

انتقال گرما از طریق رسانایی یا جابه‌جایی نیاز به محیط مادی دارد اما تابش نیاز به چنین محیطی نیست و در خلاء هم امکان‌پذیر است.



قانون استفان - بولتزمن

توان صدور

$$E = \varepsilon \sigma T_s^4$$

ε: ضریب صدور

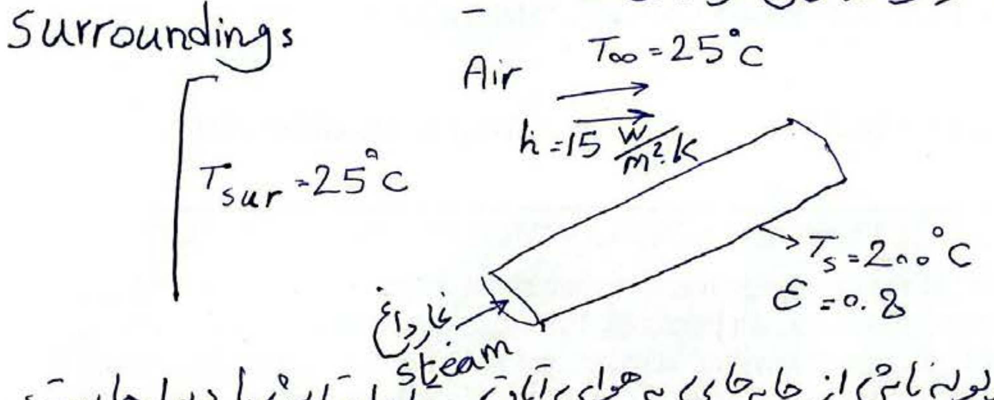
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 . K^4}$$

α: ضریب جذب

$G_{abs} = \alpha G$ تابش ورودی جذب شده

$$q'' = E - \alpha G = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

مثال: یک لوله حاوی جریان بخار داغ از اتاقی با دمای هوا و دیوارهای $25^\circ C$ می‌گذرد.
قطر بیرونی لوله $70\ mm$ و دمای سطح و ضریب صدور آن به ترتیب $200^\circ C$ و 0.8
است. اگر ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی از سطح به هوا $15\ \frac{W}{m^2.K}$ باشد
نرخ گرمای هدر رفته از واحد طول لوله را حساب کنید.



گرمای هدر رفته از لوله ناشی از جابه‌جایی به هوای اتاق و تبادل تابش با دیوارهاست.

$$q = hA(T_s - T_\infty) + \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

$$= h(\pi D L)(T_s - T_\infty) + \varepsilon \sigma (\pi D L)(T_s^4 - T_{sur}^4)$$

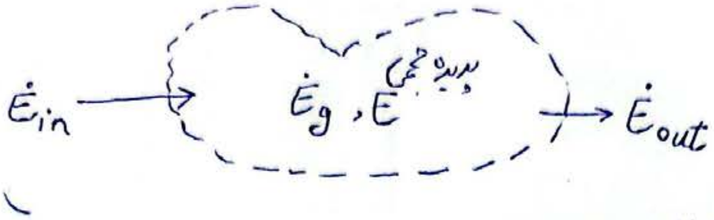
$$\frac{q}{L} = h \pi D (T_s - T_\infty) + \varepsilon \sigma \pi D (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

$$= 15 \times \pi \times 0.07 (200 - 25) + 0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} \times \pi \times 0.07 (473^4 - 298^4)$$

$$= 577 + 421 = 998\ \frac{W}{m}$$

بقای انرژی برای حجم کنترل

حجم کنترل: ناحیه‌ای از فضا محدود به یک سطح کنترل که ماده و انرژی می‌توانند از آن بگذرد.

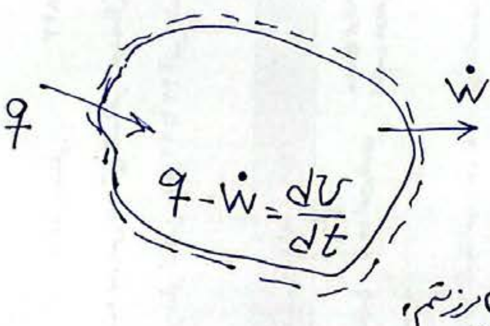


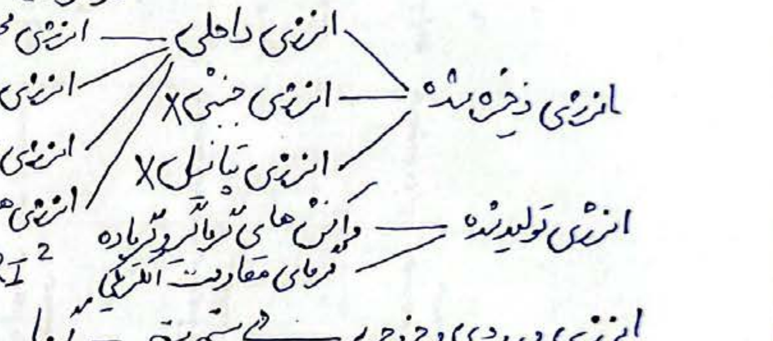
قانون اول ترمودینامیک (قانون بقای انرژی):

نرخ ورود انرژی گرمایی و مکانیکی به حجم کنترل به اضافه نرخ تولید انرژی گرمایی در آن منهای نرخ خروج انرژی گرمایی و مکانیکی از حجم کنترل باید با نرخ تغییرات انرژی ذخیره شده در حجم کنترل برابر باشد.

$$\dot E_{in}+\dot E_g-\dot E_{out}=\frac{dE}{dt}$$

- انرژی ذخیره شده
  - انرژی داخلی (در هر لحظه)
    - انرژی محسوس
    - انرژی نهان
    - انرژی شیمیایی X
    - انرژی هسته‌ای X
  - انرژی جنبشی X
  - انرژی پتانسیل X
- انرژی تولید شده
  - واکنش های گرماگیر و گرماده
  - گرمای مقاومت الکتریکی RI^2
- انرژی ورودی و خروجی
  - در سیستم بسته
    - گرما
    - کار سیستم (جابجایی مرز سیستم، چرخش، اثرهای الکترومغناطیسی) سیستم بسته
  - در سیستم باز
    - گرما
    - کار سیستم
    - انرژی جریان ماده
      - کار جریان (کار انجام شده توسط نیروهای فشاری سیال) Pv ← حجم مخصوص
      - انرژی داخلی
      - جنبشی
      - پتانسیل





$\dot E_g=0$ فاقد تولید انرژی $\left(\frac{dE}{dt}\neq 0\right)$ فرض شرایط پایدار

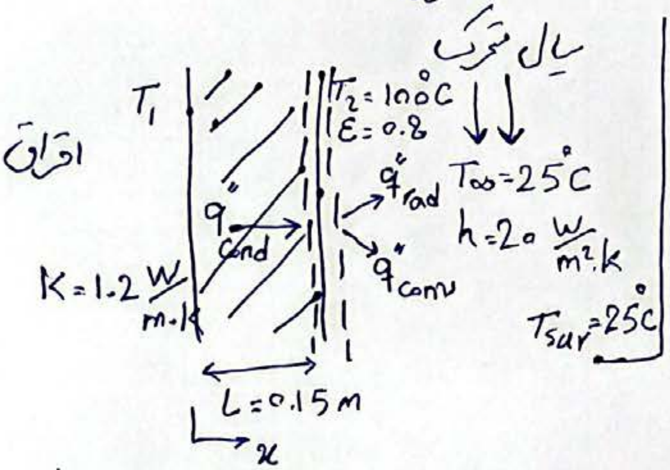
$$\dot m\left(u+Pv+\frac{V^2}{2}+gz\right)_i-\dot m\left(u+Pv+\frac{V^2}{2}+gz\right)_o+q-\dot W=0$$

$i=u+Pv$ ← آنتالپی

بقای انرژی سطحی

غالباً مواردی پیش می‌آید که لازم است بقای انرژی را در سطح یک ماده بررسی کنیم. در این حالت عبارت‌های تولید و ذخیره انرژی از معادله بقای انرژی حذف می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\dot{E}_{in}-\dot{E}_{out}=0$$



مثال: گازهای داغ حاصل از احتراق در یک کوره توسط دیواری آجری به ضخامت 0.15 m از هوا و محیط با دمای 25°C جدا شده است. آجر دارای ضریب رسانایی گرمایی $1.2\ \frac{W}{m.K}$ و ضریب صدور سطح 0.8 است. دمای سطح بیرونی دیوار در شرایط پایدار 100°C است و ضریب انتقال گرمای جابجایی بین هوا و سطح دیوار برابر $20\ \frac{W}{m^2.K}$ است. دمای سطح درونی دیوار را محاسبه کنید

$$\dot{E}_{in}-\dot{E}_{out}=0$$

$$q''_{cond}-q''_{conv}-q''_{rad}=0 \longrightarrow q''_{cond}=q''_{conv}+q''_{rad}$$

$$-K\frac{\Delta T}{L}=h\,(T_2-T_\infty)+\varepsilon\sigma\,(T_2^4-T_{sur}^4) \qquad \Delta T = T_2-T_1$$

$$-1.2\times\frac{373-T_1}{0.15}=20\,(373-298)+0.8\times5.67\times10^{-8}\,(373^4-298^4)$$

$$T_1=625\ K=352\ °C$$

فصل دوم: مقدمه‌ای بر رسانایی گرما

در فصل قبل معادله نرخ رسانایی براساس قانون فوریه معرفی گردید:

$$q_x = -KA\frac{dT}{dx}$$ نرخ رسانایی در جهت x

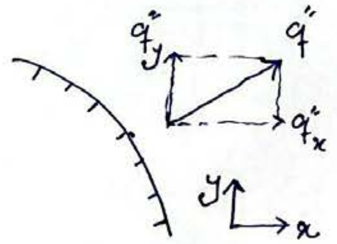
$$q''_x = \frac{q_x}{A} = -K\frac{dT}{dx}$$

از آنجا که شار گرما (q'') یک کمیت برداری است
معادله نرخ رسانایی گرما را می‌توان بصورت کلی‌تر نوشت:

عملگر دل

$$q'' = -K\nabla T = -K\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

بردار شار گرما بر سطح همدما عمود است.



در قانون فوریه k ضریب رسانایی گرمایی است که باتوجه به اختلاف در فاصله بین مولکولی می‌توان گفت:

$$K_{solid} > K_{liquid} > K_{Gas}$$

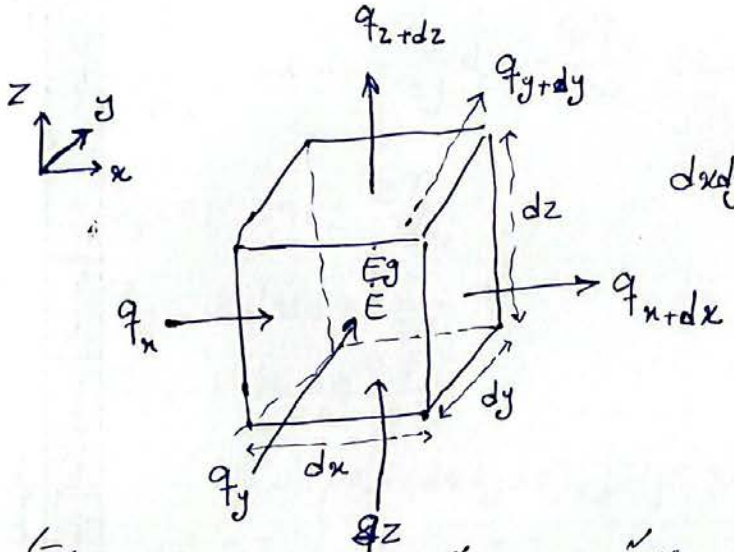
ضریب نفوذ گرمایی: معیاری است از توانایی یک ماده در رسانایی انرژی گرمایی در مقایسه با توانایی آن در ذخیره انرژی گرمایی

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

معادله نفوذ گرما و توزیع دما

هدف اصلی از مطالعه رسانایی گرمایی تعیین توزیع دما در یک ماده است.

منظور از توزیع دما تغییرات دما بر حسب مکان و یا زمان می باشد. این کار با استفاده از معادله موازنه انرژی صورت می گیرد.



حجم کنترل دیفرانسیلی dxdydz در مختصات کارتزین

برای این منظور ابتدا یک المان دیفرانسیلی در نظر گرفته و نرخ گرما ورودی و خروجی را در مختصات کارتزین تعیین می کنیم:

q_x , q_y , q_z : نرخ گرمای ورودی

$q_{x+dx} , q_{y+dy} , q_{z+dz}$: نرخ " خروجی

که با استفاده از بسط تیلور می توان نرخ گرمای خروجی در هر جهت را بصورت زیر تعیین نمود:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

عبارات تولید انرژی و انباشت انرژی را نیز می توان بصورت زیر نوشت:

$$\dot{E}_g = \dot{q}\, dx\, dy\, dz$$

$\dot{q}$: نرخ تولید انرژی بر واحد حجم ماده

$$\dot{E} = \underline{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}\, dx\, dy\, dz$$

نرخ زمانی تغییر انرژی محسوس ماده بر واحد حجم

معادلات فوق را در معادله تعادل انرژی جایگزین می نمائیم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}$$

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} + \dot{q}\,dx\,dy\,dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}dx - \frac{\partial q_y}{\partial y}dy - \frac{\partial q_z}{\partial z}dz + \dot{q}\,dx\,dy\,dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

نرخ رسانایی گرمایی را می توان از قانون فوریه نوشت:

$$q_x = -k\,dy\,dz\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k\,dx\,dz\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k\,dx\,dy\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

با جایگذاری به معادله فوق و تقسیم طرفین بر اندازه حجم کنترل (dxdydz) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله نفوذ گرما در مختصات کارتزین

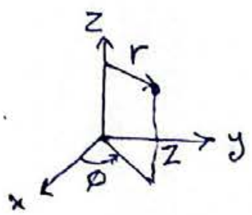
اگر K ثابت فرض شود:

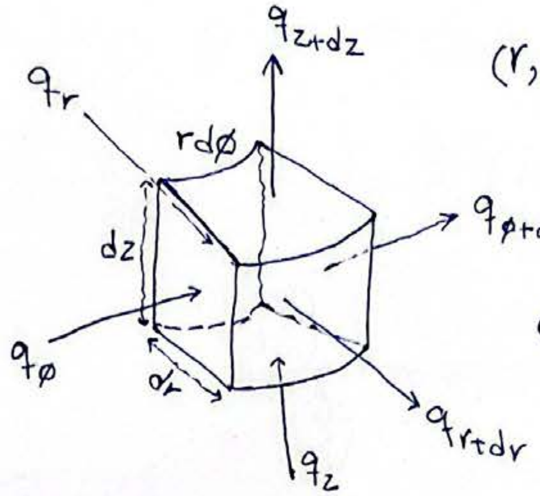
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \underbrace{\frac{\rho C_p}{k}}_{1/\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

در شرایط پایدار (دائم) مقدار انرژی انباشته شده در حجم کنترل تغییر نمی کند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

در مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z)





حجم کنترل دیفرانسیلی در مختصات استوانه‌ای $dr.\,rd\phi.dz$

هنگامی که عملگر ∇ در قانون فوریه در مختصات استوانه‌ای بیان شود، شکل کلی این قانون بصورت زیر در می‌آید:

$$q'' = -k\,\nabla T = -k\left(i\,\frac{\partial T}{\partial r} + j\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

که در آن عبارت‌های

$$q''_r = -k\,\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q''_\phi = -\frac{k}{r}\,\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$q''_z = -k\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

مؤلفه‌های شار گرما به ترتیب در جهت‌های شعاعی، محیطی و محوری‌اند.

مشابه با مختصات کارتزین می‌توان با استفاده از موازنه انرژی برای حجم کنترل دیفرانسیلی $dr.rd\phi.dz$ شکل کلی معادله گرما در مختصات استوانه‌ای بدست آورد.

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}$$

$$q_r + q_\phi + q_z - q_{r+dr} - q_{\phi+d\phi} - q_{z+dz} + \dot{q}\,dr.rd\phi.dz = \rho c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dr.rd\phi.dz$$

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r}\,dr = q_r + \frac{\partial}{\partial r}\left(-k\,rd\phi dz\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr$$

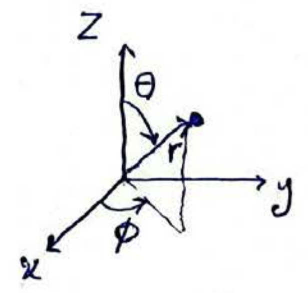
$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}\,d\phi = q_\phi + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(-\frac{k}{r}\,drdz\,\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)d\phi$$

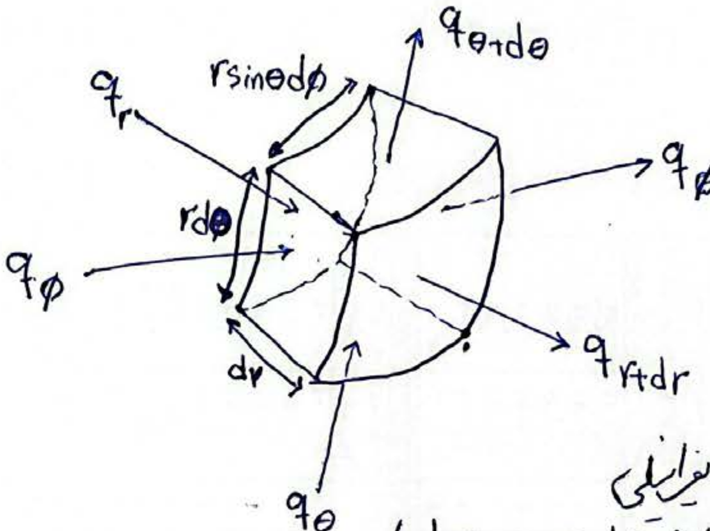
$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\,dz = q_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\,rd\phi dr\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz$$

در پایان طرفین معادله را بر حجم المان دیفرانسیلی $(dr.rd\phi.dz)$ تقسیم می‌نماییم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

در مختصات کروی (r,θ,ϕ)





حجم کنترل دیفرانسیلی
$(dr.r\sin\theta d\phi.rd\theta)$
در مختصات کروی

$$q''=-k\nabla T=-k\left(i\frac{\partial T}{\partial r}+j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)$$

که در آن سه مؤلفه شار گرما در جهت r,θ,ϕ برابرند با:

$$q''_r=-k\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q''_\theta=-\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$q''_\phi=-\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

مشابه با دو حالت قبل می‌توان معادله کلی گرما را براساس موازنه انرژی بدست آورد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+$$

$$\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

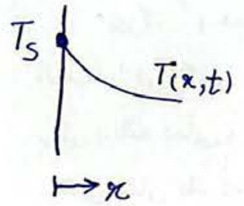
شرایط مرزی و اولیه:

با توجه به معادلات دیفرانسیلی که برای تعیین توزیع دما در یک ماده بدست آمد نیازمند حل معادلات بر اساس شرایط فیزیکی موجود در مرزهای ماده و در صورت وابستگی به زمان بر اساس شرایط موجود در زمان اولیه می باشیم. چون معادله گرما در مختصات مکانی از درجه دوم است برای توصیف سیستم دو شرط مرزی برای هر یک از این مختصات لازم است. اما چون از نظر زمانی از درجه اول است فقط یک شرط اولیه لازم است.

سه نوع شرط مرزی معمولاً در انتقال گرما وجود دارد:

۱- شرط مرزی نوع اول (شرط دیریشله) Dirichlet condition

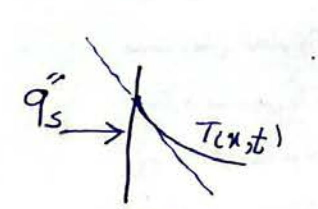
در این نوع شرط مرزی سطح در دمای ثابت T_s نگهداشته می شود.



$$T(0,t) = T_s$$

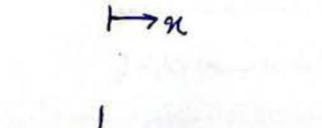
۲- شرط مرزی نوع دوم (شرط نیومن) Neumann condition

در این نوع شرط مرزی یک شار گرمای ثابت q''_s روی سطح برقرار است.



$$-k \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q''_s$$

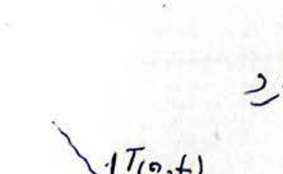
حالت خاص: شرط آدیاباتیک یا سطح عایق



$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$

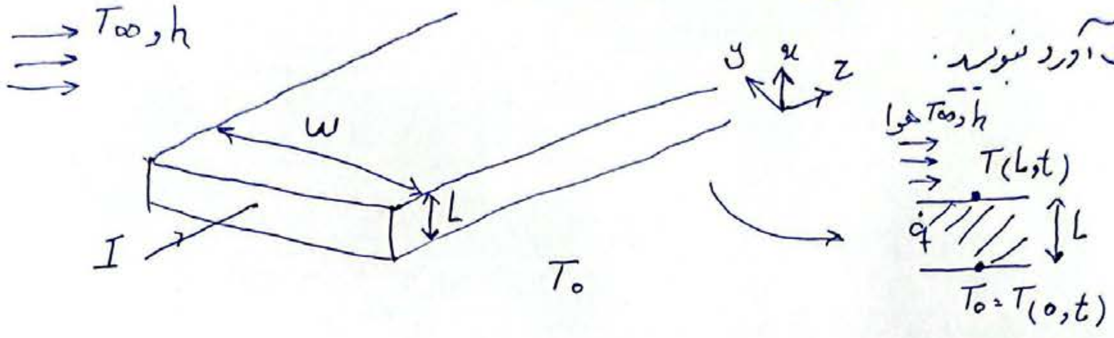
۳- شرط مرزی نوع سوم

در این نوع شرط مرزی گرمایش یا سرمایش بصورت جابجایی روی سطح وجود دارد



$$-k \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = h\left[T_\infty - T(0,t)\right]$$

مثال: یک میله بلند مسی با سطح مقطع مستطیلی که پهنای آن W خیلی بیشتر از ضخامت آن L است از زیر با یک حمام یخ سرد در تماس بوده و دمای سراسر میله با دمای حمام T_0 برابر است. ناگهان جریان الکتریسیته در میله برقرار شده و هوا با دمای T_∞ روی سطح بالایی جریان می‌یابد. دمای سطح زیرین همچنان در T_0 ثابت می‌ماند. معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی و اولیه را که با حل آن بتوان دمای میله را برحسب مکان و زمان به دست آورد بنویسید.



فرضیات: خواص ثابت اند

تولید گرما بر واحد حجم $\dot{q}$ یکنواخت است.

چون $L \ll W$ است انتقال گرما در میله در جهت x عمدتاً یک بعدی است

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط مرزی:

$$T(0,t) = T_0$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$$

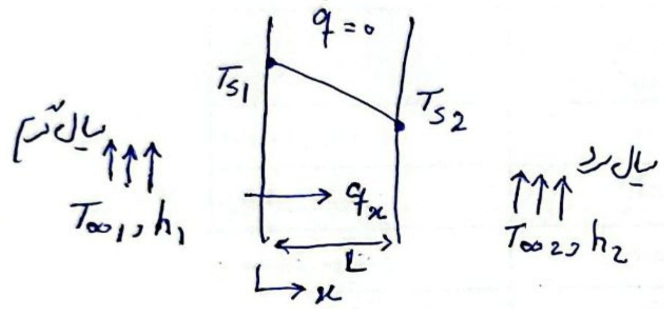
شرط اولیه

$$T(x,0) = T_0$$

۳-۱ فصل سوم: رسانایی گرمای دائم تک بعدی

واژه تک بعدی به این حقیقت اطلاق می‌شود که فقط یک جهت مختصات برای توصیف تغییرات مکانی متغیر وابسته لازم است. اگر دما در هر نقطه مستقل از زمان باشد شرایط دائم برقرار است.

- توزیع دما در دیوار تخت



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)}+\cancel{\dot{q}}=\cancel{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right)=0$$

شرایط مرزی نوع اول $T(0)=T_{s1}$ ، $T(L)=T_{s2}$

$$K=\text{constant}\xrightarrow{\text{دوبار انتگرال گیری}}T(x)=C_1x+C_2$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases}T(0)=C_1\times 0+C_2=T_{s1}\longrightarrow C_2=T_{s1}\\ T(L)=C_1\times L+T_{s1}=T_{s2}\longrightarrow C_1=\dfrac{T_{s2}-T_{s1}}{L}\end{cases}$$

$$\longrightarrow T(x)=\left(\frac{T_{2s}-T_{s1}}{L}\right)x+T_{s1}$$

قانون فوریه $q_x=-KA\dfrac{dT}{dx}=\dfrac{KA}{L}(T_{s1}-T_{s2})$

شار حرارتی $q''_x=\dfrac{q_x}{A}=\dfrac{K}{L}(T_{s1}-T_{s2})$

مفهوم مقاومت گرمایی

اگر مقاومت را به عنوان نسبت پتانسیل رانش به نرخ انتقال گرما تعریف کنیم مقاومت گرمایی برای رسانایی برابر خواهد بود با:

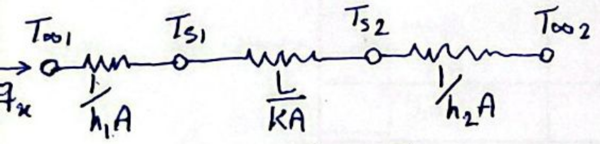
$$R_{t,cond} = \frac{T_{s1}-T_{s2}}{q_x} = \frac{L}{KA}$$

به همین ترتیب می‌توان مقاومت گرمایی جابجایی را نیز بدست آورد: $q = hA(T_s - T_\infty)$

$$R_{t,conv} = \frac{T_s - T_\infty}{q} = \frac{1}{hA}$$

چنین مقاومتی را نیز می‌توان برای تشعشع نیز در نظر گرفت $(\frac{1}{h_r A})$

مفهوم مقاومت گرمایی ابزار مفیدی برای درک و محاسبه انتقال گرماست. بطور مثال در دیوار تخت (بخش قبل) می‌توان q_x را بصورت زیر محاسبه نمود:



$$q_x = \frac{T_{\infty1}-T_{s1}}{\frac{1}{h_1A}} = \frac{T_{s1}-T_{s2}}{\frac{L}{KA}} = \frac{T_{s2}-T_{\infty2}}{\frac{1}{h_2A}}$$

و یا براساس اختلاف دمای کلی $(T_{\infty1}-T_{\infty2})$:

$$q_x = \frac{T_{\infty1} - T_{\infty2}}{\frac{1}{h_1A} + \frac{L}{KA} + \frac{1}{h_2A}}$$

دیوار مرکب

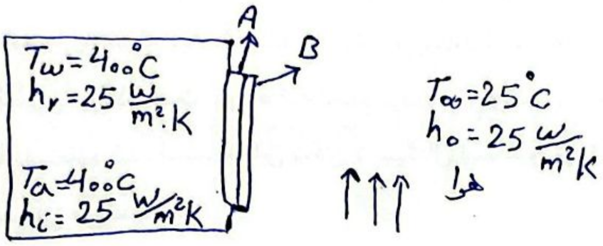
$$\Delta T = T_{\infty1} - T_{\infty4}$$

برای سیستم‌های مرکب آسانتر است که با ضریب انتقال گرمای کلی کار شود که با عبارتی مشابه قانون سرمایش نیوتن تعریف می‌شود:

$$q_x = UA\Delta T \longrightarrow R_{tot} = \frac{1}{UA}$$

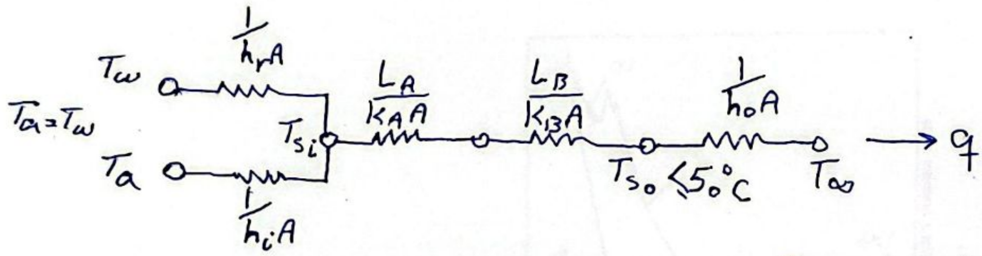
$$R_{tot} = \frac{1}{h_1A} + \frac{L_A}{k_AA} + \frac{L_B}{k_BA} + \frac{L_C}{k_CA} + \frac{1}{h_4A} = \frac{1}{UA}$$

مثال: یک کارخانه تولید لوازم خانگی طرحی برای ساخت یک فر ارائه نموده است. در این طرح از پنجره‌ای مرکب که داخل فر را از بیرون جدا می‌سازد استفاده می‌شود. این پنجره مرکب از دو ورق پلاستیکی A و B مقاوم در برابر گرما با ضخامت‌های $L_A = 2L_B$ و ضریب رسانایی $K_A = 0.15 \frac{W}{m\cdot K}$ و $K_B = 0.08 \frac{W}{m\cdot K}$ ساخته شده است. اگر دمای دیواره‌ها و هوای داخل آن $400^\circ C$ و دمای هوای بیرون T_∞ برابر $25^\circ C$ باشد و ضریب جابه‌جایی و تابش داخل فر و همچنین ضریب جابه‌جایی بیرون $25 \frac{W}{m^2\cdot K}$، برای آنکه دمای سطح خارجی پنجره از $50^\circ C$ بیشتر نشود حداقل ضخامت آن چقدر باید باشد؟



فرضیات: شرایط دائم است

رسانایی یک بعدی است



با توجه به مشخص بودن دمای سطح خارجی پنجره (T_{so}) می‌توان موازنه انرژی را برای این سطح نوشت:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

$$\dot{E}_{in} = q = \frac{T_a - T_{so}}{R_{a-so}} \qquad \dot{E}_{out} = q = h_o A (T_{so} - T_\infty)$$

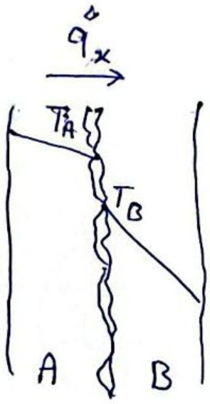
$$R_{a-so} = \left(\frac{1}{\frac{1}{h_i A}} + \frac{1}{\frac{1}{h_r A}} \right)^{-1} + \frac{L_A}{K_A A} + \frac{L_B}{K_B A} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{h_i + h_r} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B} \right)$$

با جایگذاری در موازنه انرژی:

$$\frac{T_a - T_{so}}{\frac{1}{h_i + h_r} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B}} = h_o (T_{so} - T_\infty) \xrightarrow{L_B = \frac{L_A}{2}} L_A = 0.0418 \text{ m}$$

$$L = L_A + \frac{L_A}{2} = 0.0627 \text{ m} = 62.7 \text{ mm}$$

مقاومت سطح تماس



در سیستم های مرکب ممکن است افت دما در سطح تماس مواد قابل توجه باشد

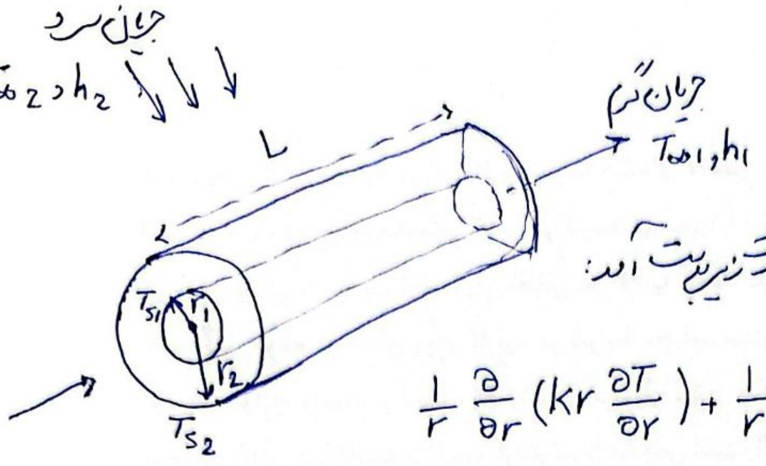
این افت دما ناشی از مقاومت حرارتی سطح تماس ($R_{t,c}$) است

تعریف مقاومت بر واحد سطح:

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

مقاومت حرارتی سطح تماس ناشی از اثر زبری سطح است. بین سطح تماس شکاف های وجود دارد که انتقال حرارت تابشی و رسانایی از آنها رخ می دهد

استوانه



معادله ریاضی گرما در مختصات استوانه‌ای بصورت زیر بدست آمد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}+\cancel{\dot{q}}=\cancel{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=0$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} T(r_1)=T_{s1} \\ T(r_2)=T_{s2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دوبار انتگرال گیری}]{k=\text{constant}} \quad T(r)=C_1 \ln r + C_2$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} \begin{cases} T(r_1)=C_1\ln r_1 + C_2 = T_{s1} \\ T(r_2)=C_1 \ln r_2 + C_2 = T_{s2} \end{cases}$$

$$C_1=\frac{T_{s2}-T_{s1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{T_{s1}-T_{s2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

$$C_2=T_{s1}-\frac{T_{s1}-T_{s2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln r_1 = T_{s2}-\frac{T_{s1}-T_{s2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln r_2$$

$$\longrightarrow \boxed{T(r)=\frac{T_{s1}-T_{s2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)+T_{s2}}$$

با مشخص شدن توزیع دما می‌توان با استفاده از قانون فوریه نرخ انتقال حرارت در جهت r را محاسبه نمود:

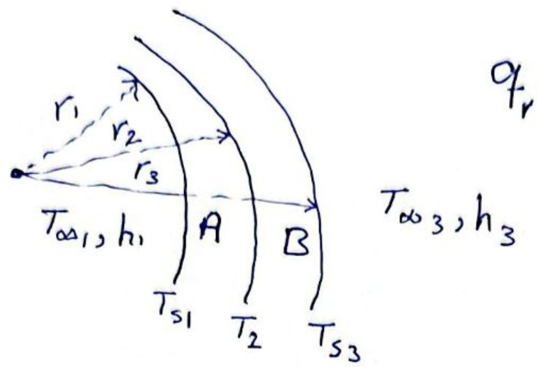
$$q_r=-KA\frac{dT}{dr}=-K(2\pi rL)\frac{dT}{dr}=\frac{2\pi LK(T_{s1}-T_{s2})}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

که با توجه به تعریف مقاومت حرارتی می‌توان نتیجه گرفت:

رسانایی در مختصات استوانه

$$R_{t,cond}=\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi LK}$$

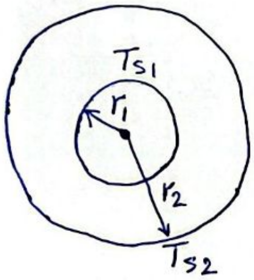
بر این اساس می توان نرخ انتقال حرارت را در استوانه های مرکب نیز به سادگی محاسبه نمود:



$$q_r = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 3}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_A L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_B L} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_3}}$$

کره

با بکارگیری روشی مشابه دیوار تخت و استوانه می توان توزیع دما، نرخ انتقال حرارت و مقاومت رسانایی را در مختصات کروی تعیین نمود:



معادله گرما $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$

اثبات شود

توزیع دما $T(r) = T_{s1} - (T_{s1} - T_{s2}) \left[\frac{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right]$

نرخ انتقال حرارت $q_r = \frac{4\pi k (T_{s1} - T_{s2})}{\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_2}\right)}$

مقاومت رسانایی $R_{t,cond} = \frac{\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_2}\right)}{4\pi k}$

رسانایی با تولید انرژی گرمایی

فرآیند متداول تولید انرژی گرمایی شامل تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی در یک جسم حامل جریان برق است

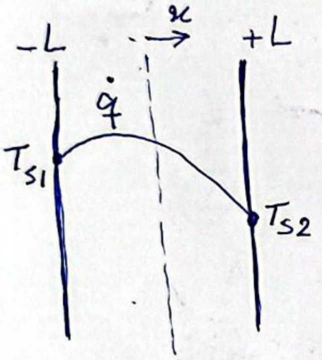
$$\dot{E}_g = I^2 R_e$$

اگر تولید انرژی در واحد زمان (توان) بطور یکنواخت در ماده‌ای به حجم V رخ دهد:

نرخ تولید گرما بر واحد حجم $\dot{q} = \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R_e}{V}$

سایر شکل‌های تولید انرژی می‌تواند بصورت واکنش‌های هسته‌ای و شیمیایی هم باشد.

- دیوار تخت



اگر ضریب رسانایی k ثابت باشد

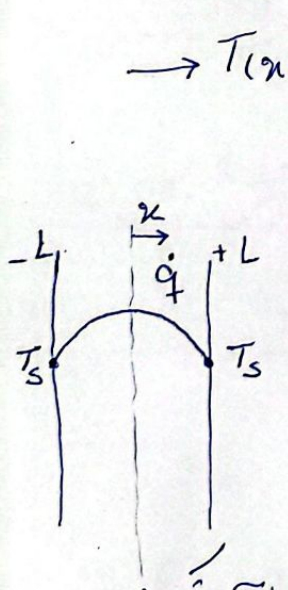
$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{k}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$T(-L) = T_{s1}, \quad T(L) = T_{s2} \longrightarrow C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L}, \quad C_2 = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

$$\longrightarrow T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2}\,\frac{x}{L} + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

اگر هر دو سطح جسم در دمای یکسان باشند $T_{s1} = T_{s2} = T_s$

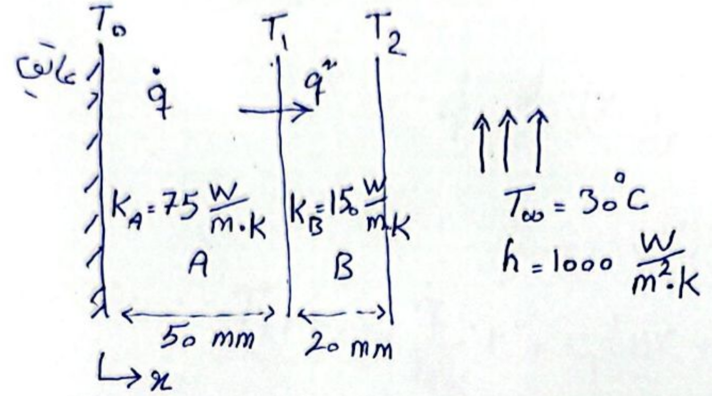


$$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

در اینحالت حداکثر دما در $x=0$ رخ می‌دهد که در این نقطه شرایط تقارن وجود داشته و گرادیان دما صفر است $\left(\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{x=0} = 0$

سطح آدیاباتیک

مثال: یک دیوار تخت از دو لایه A و B ساخته شده است. در لایه A گرمای یکنواخت با شدت $1.5\times10^6 \frac{W}{m^3}$ تولید می‌شود. در لایه B انرژی تولید نمی‌شود. سطح بیرونی لایه A کاملاً عایق بندی شده و سطح بیرونی لایه B توسط جریان آب خنک می‌شود. دمای سطح عایق شده و دمای سطح خنک شده را بدست آورید.



با فرض شرایط دائم و دمای یک بعدی
مقاومت تماس ناچیز و خواص ثابت

شار خروجی از لایه B با شار گرمای جابجایی برابر است:

$$\text{I} \qquad q'' = h(T_2 - T_\infty)$$

شار گرمایی موجود ناشی از تولید گرمای یکنواخت در لایه A است:

$$\text{II} \qquad q'' = \dot q L_A$$

$$\text{I},\text{II} \longrightarrow T_2 = T_\infty + \frac{\dot q L_A}{h} = 105°C$$

دمای سطح عایق شده که حداکثر دما در لایه A و در $x=0$ است را می‌توان از توزیع دما در این لایه تعیین نمود:

$$T(x) = \frac{\dot q L_A^2}{2K_A}\left(1 - \frac{x^2}{L_A^2}\right) + T_1 \longrightarrow T(0) = T_0 = \frac{\dot q L_A^2}{2K_A} + T_1 \qquad \text{III}$$

که T_1 را می‌توان با استفاده از مدار گرمایی بین T_1 و T_2 تعیین نمود:

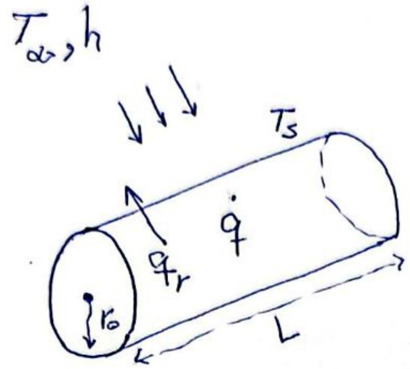
$$q'' \rightarrow T_1 \quad R'' = \frac{L_B}{K_B} \quad T_2$$

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{R''} \longrightarrow T_1 = T_2 + R'' q'' = T_2 + \frac{L_B}{K_B}\times \dot q L_A = 105 + \frac{0.02}{150}\times 1.5\times10^6\times 0.05 = 115°C$$

با مشخص شدن T_1 می‌توان T_0 را بدست آورد:

$$\text{III} \longrightarrow T_0 = \frac{1.5\times10^6\times 0.05^2}{2\times 75} + 115 = 140°C$$

– سیستم های شعاعی (استوانه ای و کروی)



توزیع دما را در یک استوانه توپر با تولید گرمای یکنواخت $\dot{q}$ بدست می آوریم:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

با دوبار انتگرال گیری از معادله گرما خواهیم داشت:

$$T(r)=-\frac{\dot{q}}{4k}r^2+C_1\ln r+C_2$$

ثوابت انتگرال گیری را به کمک دو شرط مرزی تعیین می نمائیم:

شرط تقارن $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=0 \longrightarrow C_1=0$ $\qquad T(r_0)=T_s \longrightarrow C_2=T_s+\frac{\dot{q}}{4k}r_0^2$

$$\longrightarrow T(r)=\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)+T_s$$

دمای سطح T_s را نیز می توان با استفاده از موازنه انرژی بدست آورد:

$$\dot{q}(\pi r_0^2 L)=h(2\pi r_0 L)(T_s-T_\infty)$$

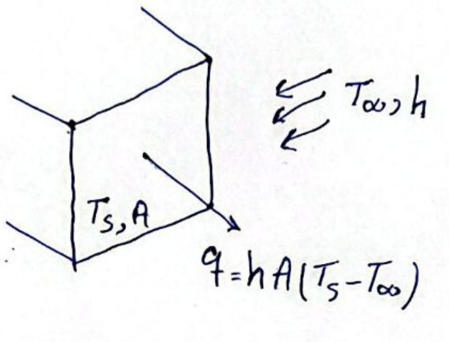
$$\longrightarrow T_s=T_\infty+\frac{\dot{q}r_0}{2h}$$

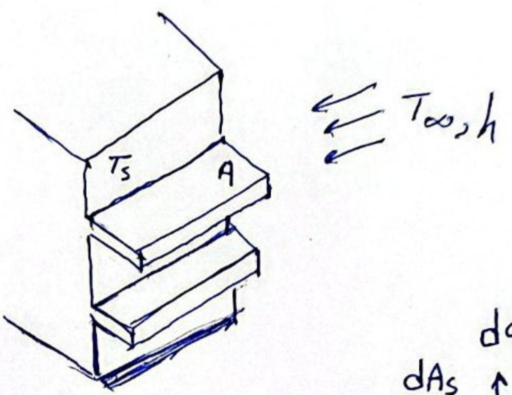
توزیع دما را در یک کره توپر با تولید گرمای یکنواخت $\dot{q}$ بدست آورید.

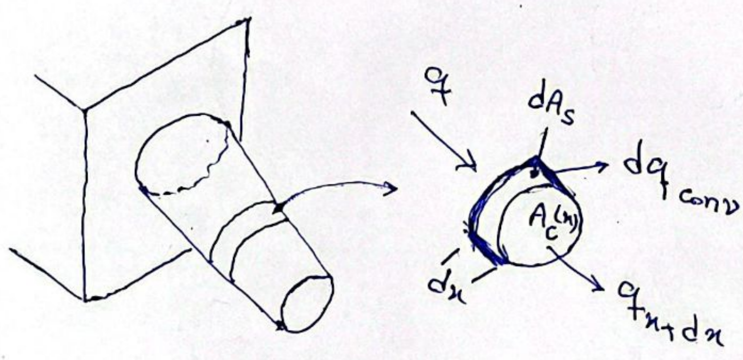
$$T(r)=\frac{\dot{q}r_0^2}{6k}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)+T_s$$

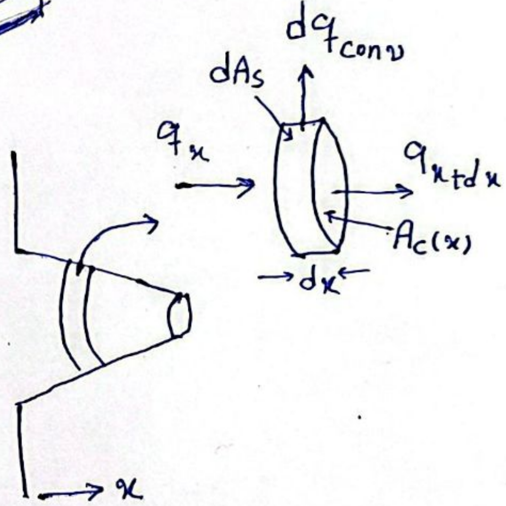
انتقال گرما از سطوح گسترش یافته (پره) Extended surfaces (Fin)

از سطوح گسترش یافته (پره) جهت افزایش نرخ انتقال گرما بین یک جسم جامد و سیال مجاور آن از طریق افزایش مساحت سطح جابجایی استفاده می‌شود.









موازنه انرژی برای المان دیفرانسیلی:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

از قانون فوریه می‌دانیم:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}$$

همچنین از بسط تیلور می‌دانیم:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx$$
$$= -kA_c\frac{dT}{dx} - k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx$$

از قانون سرمایش نیوتن می‌دانیم:

$$dq_{conv} = h\,dA_s(T - T_\infty)$$

با جاگذاری معادله‌های بالا در موازنه انرژی خواهیم داشت:

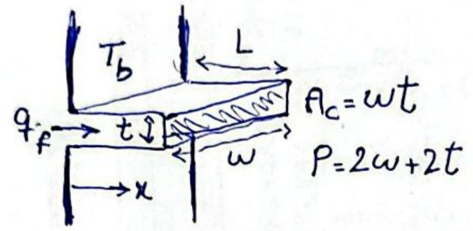
$$\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)-\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

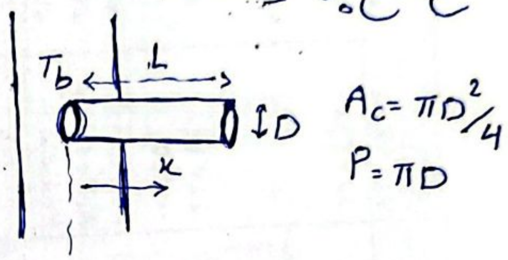
فرم کلی معادله انرژی برای سطح گسترش یافته تک بعدی

و یا

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\left(\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx}-\left(\frac{1}{A_c}\frac{h}{K}\frac{dA_s}{dx}\right)(T-T_\infty)=0$$

چنانچه سطح مقطع پره یکنواخت باشد:





در پره‌های فوق A_c ثابت و $A_s=Px$ $\longleftarrow$ $\frac{dA_c}{dx}=0$ و $\frac{dA_s}{dx}=P$

$$\longrightarrow \frac{d^2T}{dx^2}-\frac{hP}{KA_c}(T-T_\infty)=0$$

با تعریف دمای مازاد $\theta=(T-T_\infty)$

$$\longrightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0 \qquad m^2=\frac{hP}{KA_c}$$

با حل این معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم همگن خواهیم داشت:

$$\theta(x)=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}$$

که ثوابت C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی مناسب تعیین می‌شوند.

دمای پایه پره

شرط مرزی اول $\theta(x=0)=T_b-T_\infty=\theta_b$

شرط مرزی دوم در نوک پره $(x=L)$ ممکن است یکی از چهار حالت زیر باشد:

حالت اول: انتقال گرمای جابجایی در نوک پره

$$hA_c\left[T(L)-T_\infty\right]=-kA_c\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L}$$

$$h\,\theta(L)=-k\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L}$$

با جایگذاری دو شرط مرزی در معادله $\theta(x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\theta_b=C_1+C_2\longrightarrow C_2=\theta_b-C_1\\ h\left(C_1e^{mL}+C_2e^{-mL}\right)=km\left(C_2e^{-mL}-C_1e^{mL}\right)\end{cases}$$

$$\longrightarrow -\frac{h}{k}\left(C_1e^{mL}+\underbrace{C_2}_{\theta_b-C_1}e^{-mL}\right)=mC_1e^{mL}-m\underbrace{C_2}_{\theta_b-C_1}e^{-mL}$$

$$-\frac{h}{k}C_1e^{mL}-\frac{h}{k}\theta_be^{-mL}+\frac{h}{k}C_1e^{-mL}=mC_1e^{mL}-m\theta_be^{-mL}+mC_1e^{-mL}$$

$$-\frac{h}{k}C_1e^{mL}+\frac{h}{k}C_1e^{-mL}-mC_1e^{mL}-mC_1e^{-mL}=\frac{h}{k}\theta_be^{-mL}-m\theta_be^{-mL}$$

تقسیم بر m

$$-\frac{h}{mk}C_1e^{mL}+\frac{h}{mk}C_1e^{-mL}-C_1e^{mL}-C_1e^{-mL}=\frac{h}{mk}\theta_be^{-mL}-\theta_be^{-mL}$$

در منفی ضرب

$$C_1\left[\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)\right]=\theta_be^{-mL}\left[1-\frac{h}{mk}\right]$$

$$C_1=\frac{\theta_b\left[1-\frac{h}{mk}\right]e^{-mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}$$

$$C_2=\theta_b-\frac{\theta_b\left[1-\frac{h}{mk}\right]e^{-mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}=\frac{\theta_b\left(1+\frac{h}{mk}\right)e^{mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}$$

جایگذاری در جواب معادله:

$$\theta=\frac{\theta_b\left[1-\frac{h}{mk}\right]e^{-mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}e^{mx}+\frac{\theta_b\left[1+\frac{h}{mk}\right]e^{mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\left[e^{m(L-x)}+e^{-m(L-x)}\right]+\frac{h}{mk}\left[e^{m(L-x)}-e^{-m(L-x)}\right]}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{mk}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}$$

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\cosh m(L-x)+\frac{h}{mk}\sinh m(L-x)}{\cosh mL+\frac{h}{mk}\sinh mL}}$$

در نهایت با استفاده از قانون فوریه می‌توان نرخ انتقال حرارت از پره را بدست آورد:

$$q_f=-kA_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=-kA_c\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$q_f=-kA_c\theta_b\left.\frac{-m\sinh m(L-x)-m\frac{h}{mk}\cosh m(L-x)}{\cosh mL+\frac{h}{mk}\sinh mL}\right|_{x=0} \qquad m=\sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$$

$$\rightarrow \boxed{q_f=\sqrt{hPkA_c}\,\theta_b\,\frac{\sinh mL+\frac{h}{mk}\cosh mL}{\cosh mL+\frac{h}{mk}\sinh mL}}$$

حالت دوم: نوک پره آدیاباتیک بوده و جابه‌جایی وجود ندارد.

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=0 \longrightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}=0$$

با جاگذاری دو شرط مرزی در جواب معادله داریم:

$$\begin{cases}\theta_b=C_1+C_2\\ \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}=mC_1e^{mL}-mC_2e^{-mL}=0 \Rightarrow C_1e^{mL}-C_2e^{-mL}=0\end{cases}$$

$$\longrightarrow C_2=C_1\frac{e^{mL}}{e^{-mL}}$$

$$\theta_b=C_1+C_1\frac{e^{mL}}{e^{-mL}}=C_1\left[1+\frac{e^{mL}}{e^{-mL}}\right]\longrightarrow C_1=\theta_b\frac{e^{-mL}}{e^{mL}+e^{-mL}}$$

$$C_2 = \theta_b \frac{e^{mL}}{e^{mL}+e^{-mL}}$$

ثوابت C_1 و C_2 را در جواب معادله جایگزین می‌کنیم:

$$\theta = \theta_b \left[\left(\frac{e^{-mL} e^{mx}}{e^{mL}+e^{-mL}} \right) + \left(\frac{e^{mL} . e^{-mx}}{e^{mL}+e^{-mL}} \right) \right]$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \left(\frac{e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}}{e^{mL}+e^{-mL}} \right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}}$$

$$\boxed{q_f = \sqrt{hPKA_c}\ \theta_b \tanh mL}$$

حالت سوم: دمای نوک پره معلوم باشد $T(L) = T_L \longrightarrow \theta(L) = T_L - T_\infty = \theta_L$

$$\begin{cases} \theta_b = C_1 + C_2 \\ \theta(L) = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \theta_L \end{cases}$$

مشابه حالت‌های قبل خواهیم داشت:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

$$q_f = \sqrt{hPKA_c}\ \theta_b \frac{\cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_b}}{\sinh mL}$$

حالت چهارم: پره طویل $(L \to \infty)$ $\longrightarrow$ $\theta(L) = T_\infty - T_\infty = 0$

$T(L) = T_\infty$

$$\begin{cases} \theta_b = C_1 + C_2 \\ \theta(L) = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = 0 \longrightarrow C_2 = -C_1 \dfrac{e^{mL}}{e^{-mL}} \end{cases}$$

$$\theta_b = C_1 - C_1 \frac{e^{mL}}{e^{-mL}} = C_1 \left[1 - \frac{e^{mL}}{e^{-mL}}\right] = C_1 \frac{e^{-mL} - e^{mL}}{e^{-mL}}$$

$$\longrightarrow C_1 = \theta_b \frac{e^{-mL}}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

$$L \longrightarrow \infty \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 = \theta_b$$

با جایگذاری در جواب معادله اصلی داریم:

$$\theta = \theta_b e^{-mx}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}}$$

$$\boxed{q_f = \sqrt{hPkA_c}\;\theta_b}$$

عملکرد پره: از پره‌ها برای افزایش انتقال گرما بواسطه افزایش سطح مؤثر استفاده می شود اما خود پره نیز یک مقاومت رسانایی بوجود می آورد که در انتقال حرارت مؤثر است. بنابراین باید کارآیی پره را بررسی نمود

کارآیی پره: نسبت نرخ انتقال گرما با پره به نرخ انتقال گرما بدون پره

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{h A_{c,b} \theta_b}$$

$A_{c,b}$: مساحت سطح مقطع پره در پایه آن

بطور کلی از پره‌ها زمانی استفاده می شود که $\varepsilon_f \geq 2$

بازده پره: نسبت نرخ انتقال گرما با پره به حداکثر نرخ انتقال گرمای ممکن با پره (تمام سطح پره در دمای پایه پره باشد)

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{max}} = \frac{q_f}{h A_f \theta_b}$$

A_f: مساحت سطح پره

بازده کلی سطح پره دار:

برخلاف بازده پره η_f که برای بیان عملکرد یک پره واحد بکار می رود بازده کلی سطح η_o برای مجموعه پره‌ها و سطح اصلی مورد استفاده قرار می گیرد

$$\eta_o = \frac{q_t}{q_{max}} = \frac{q_t}{h A_t \theta_b}$$

q_t: نرخ کلی انتقال گرما از سطح A_t (مساحت کل پره‌ها و سطح اصلی)

$$A_t = N A_f + A_b$$

N: تعداد پره‌ها

A_f: مساحت سطح هر پره

A_b: مساحت سطح اصلی

نرخ کلی انتقال گرما را می‌توان بصورت رابطه زیر نوشت:

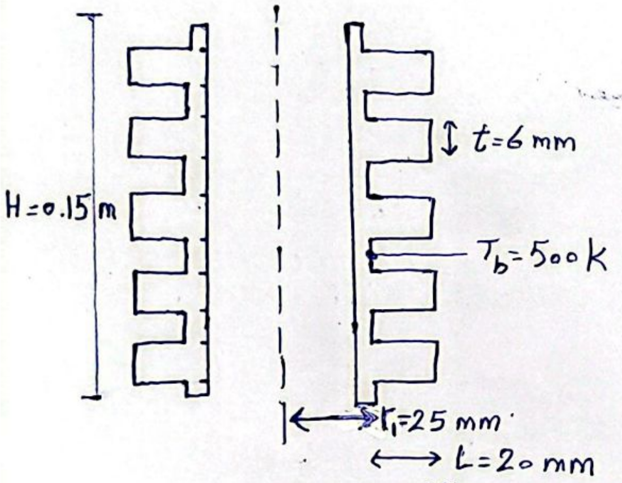
$$q_t = \underbrace{N\eta_f h A_f \theta_b}_{q_f} + \underbrace{h A_b \theta_b}_{q_b}$$

$$\longrightarrow q_t = h\left[N\eta_f A_f + (A_t - NA_f)\right]\theta_b = hA_t\left[1 - \frac{NA_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]\theta_b$$

$$\eta_0 \xrightarrow{\text{تعریف}} \eta_0 = 1 - \frac{NA_f}{A_t}(1-\eta_f)$$

با استفاده از معادله بالا و همینطور تعریف بازده کلی $\eta_0 = \dfrac{q_t}{hA_t\theta_b}$ می‌توان q_t را تعیین نمود.

مثال: سیلندر یک موتورسیکلت از آلیاژ آلومینیوم به ارتفاع $H = 0.15\,m$ و قطر بیرونی $D = 50\,mm$ ساخته شده است. دمای سطح بیرونی سیلندر در شرایط عادی $500\,K$ بوده و در معرض هوای محیط به دمای $300\,K$ با ضریب جابجائی $50\,\frac{W}{m^2.K}$ قرار دارد. برای افزایش انتقال گرما به محیط پره‌های شعاعی به طور یکپارچه با سیلندر ریخته‌گری شده‌اند. ۵ پره به ضخامت $t = 6\,mm$ و طول $L = 20\,mm$ با فاصله‌های مساوی از یکدیگر قرار دارند. افزایش انتقال گرما با استفاده از این پره‌ها را در شرایطی بدست آورید که بازده هر پره $\eta_f \simeq 0.95$ باشد.



نرخ انتقال گرما با پره:

$$q_t = hA_t\left[1 - \frac{NA_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]\theta_b$$

$r_c = 25 + 20 + 3$

$$A_f = 2\pi(r_c^2 - r_1^2) = 2\pi(0.048^2 - 0.025^2) = 0.0105\,m^2$$

$$A_t = NA_f + 2\pi r_1(H - Nt) = 5\times0.0105 + 2\pi\times0.025(0.15 - 5\times0.006) = 0.0716\,m^2$$

$$q_t = 50\times0.0716\left[1 - \frac{5\times0.0105}{0.0716}(1-0.95)\right](500-300) = 690\,W$$

نرخ انتقال گرما بدون پره:

$$q = hA\theta_b = h(2\pi r_1 H)(T_b - T_\infty) = 50\times2\pi\times0.025\times0.15\times(500-300) = 236\,W$$

$$\Delta q = q_t - q = 454\,W$$

فصل چهارم: رسانایی گرمایی دائم و دو بعدی

در این فصل اثرهای دوبعدی رسانائی گرمایی در شرایط دائم مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تعیین توزیع دما در سیستم‌های دوبعدی چندین روش برای حل معادله گرمایی بکار گرفته می‌شود:

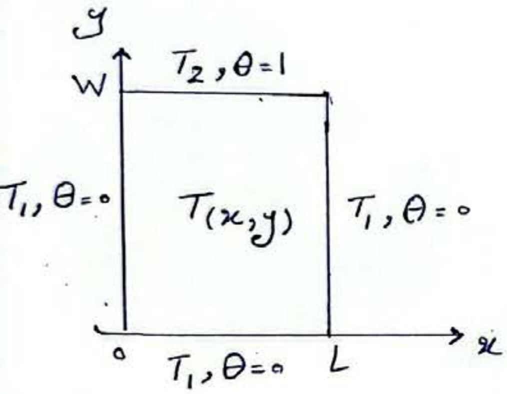
۱- روش تحلیلی مانند جداسازی متغیرها

۲- روش ترسیمی

۳- روش عددی مانند اختلاف محدود

- روش جداسازی متغیرها

برای آشنایی با کاربرد این روش مثال زیر حل می‌گردد.



مثال: با توجه به سیستم دوبعدی روبرو و شرایط مرزی آن، توزیع دما را در این مقطع مستطیلی تعیین نمائید.

معادله رسانایی گرمایی دوبعدی $\qquad \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$

برای حل این معادله و همگن سازی شرایط مرزی آن از تغییر متغیر زیر کمک می‌گیریم:

$$\theta \equiv \frac{T-T_1}{T_2-T_1} \longrightarrow \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$$

شرایط مرزی

$$\theta(0,y)=0 \qquad \theta(x,0)=0$$
$$\theta(L,y)=0 \qquad \theta(x,W)=1$$

بنابراین با تغییر متغیر صورت گرفته سه شرط از چهار شرط مرزی همگن گردید.

مطابق روش جداسازی متغیرها می‌توان فرض نمود که جواب مورد نظر بصورت حاصلضرب دو تابع است که یکی فقط تابع x و دیگری فقط تابع y است.

$$\theta(x,y) = X(x).Y(y)$$

با جاگذاری آن در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$

با جداسازی متغیرها در دو سمت معادله بصورت:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

این تساوی در صورتی همیشه برقرار است که هر دو طرف معادله برابر با مقدار ثابتی باشند که این مقدار ثابت را با λ^2 نمایش می دهیم:

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2Y=0$$

روش حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و همگن

چنانچه ریشه‌های فرم اپراتوری معادله $(m_1, m_2, \ldots)$

الف) مقادیر حقیقی و غیرمساوی باشند

جواب همگن: $C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+\ldots$

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow$ $C'e^{m_1x}+C''e^{-mx}=C_1\sinh mx+C_2\cosh mx$ $\quad C_1=C'-C''$, $C_2=C'+C''$

ب) بعضی از ریشه‌ها مختلط باشند $(a\pm bi)$

جواب همگن: $e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$

ج) تعداد K ریشه m مساوی باشند

جواب همگن: $(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_Kx^{K-1})e^{mx}$

چنانچه شرایط مرزی را در جواب معادله جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\Theta(0,y) = X(0)\cdot Y(y) = 0 \longrightarrow X(0) = 0 \qquad \Theta(x,0) = X(x)\cdot Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0$$

$$\Theta(L,y) = X(L)\cdot Y(y) = 0 \longrightarrow X(L) = 0$$

حال جواب‌های معادله را به ازای مقادیر مختلف λ^2 بررسی می‌کنیم:

$\lambda^2 = 0$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \longrightarrow X(x) = C_1 + C_2 x$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(L) = C_2 L = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

بنابراین در این شرایط تابع $X(x)$ برابر صفر است در نتیجه تابع Θ نیز صفر می‌گردد که قابل قبول نیست.

$\lambda^2 < 0$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \xrightarrow{\text{فرم اپراتوری}} (D^2+\lambda^2)X = 0 \rightarrow D^2 = -\lambda^2 \rightarrow D = \pm\sqrt{-\lambda^2} = \pm\lambda$$

ریشه‌های فرم اپراتوری معادله مقادیر حقیقی و نامساوی است

$$X(x) = C_3 \sinh\lambda x + C_4 \cosh\lambda x$$

$$X(0) = \cancel{C_3 \times 0} + C_4 \cosh(0) = 0 \longrightarrow C_4 = 0$$

$$X(L) = C_3 \sinh\lambda L = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

در این حالت هم مجدداً تابع $X(x)$ صفر شده که قابل قبول نیست.

$\lambda^2 > 0$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \xrightarrow{\text{فرم اپراتوری}} D = \pm\sqrt{-\lambda^2} = \pm\lambda i \longrightarrow X(x) = C_5\cos\lambda x + C_6 \sin\lambda x$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \longrightarrow Y(y) = C_7 \sinh\lambda y + C_8 \cosh\lambda y$$

$$X(0) = C_5 \cos(0) + C_6 \times 0 = 0 \longrightarrow C_5 = 0$$

$$X(L) = C_6 \sin \lambda L = 0 \longrightarrow \sin \lambda L = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$ مقادیر ویژه

$$Y(0) = C_7 \times 0 + C_8 \cosh(0) = 0 \longrightarrow C_8 = 0$$

$$\longrightarrow \theta(x, y) = (C_6 \sin \lambda x)(C_7 \sinh \lambda y)$$

در رابطه فوق به ازای مقادیر مختلف n جواب های بیشماری حاصل می شود که جواب کلی تر براساس اصل جمع پذیری

بصورت زیر بدست می آید:

$$C_n = C_6 C_7 \longrightarrow \theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda x \sinh \lambda y$$

برای تعیین C_n شرط مرزی ناهمگن را اعمال می کنیم:

$$\theta(x, W) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda x \sinh \lambda W = 1$$

مقدار C_n را می توان با توجه به قواعد سری فوریه محاسبه نمود:

سری کسینوسی فوریه

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L F(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

سری سینوسی فوریه

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

سری سینوسی فوریه

$$\longrightarrow F(x) = 1, \quad b_n = C_n \sinh \lambda W$$

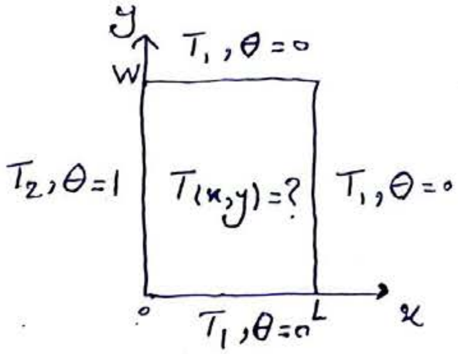
$$C_n \sinh \lambda W = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \times \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_L^0 = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

$$\longrightarrow C_n = \frac{2\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{n\pi \sinh \frac{n\pi W}{L}} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

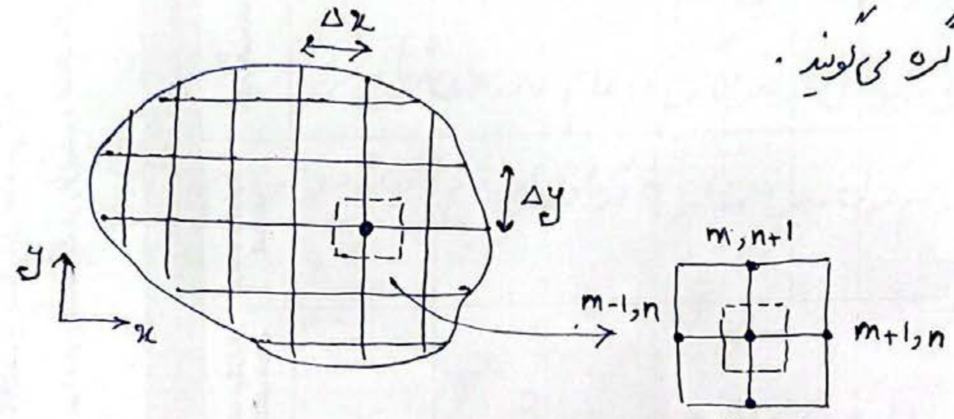
$$\theta(x,y) = \frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh\frac{n\pi y}{L}}{\sinh\frac{n\pi W}{L}}$$

: HW



- روش اختلاف محدود

در روش اختلاف محدود که یک روش حل عددی به شمار می رود برخلاف روش تحلیلی که تعیین دما را در هر نقطه داخل ماده امکانپذیر می سازد، تنها برای تعیین دما در نقاط گسسته قابل استفاده است. بنابراین اولین گام در هر تحلیل عددی انتخاب این نقطه‌ها بوسیله شبکه بندی (گسسته سازی) است که به نقاط ایجاد شده گره می گویند.



پس از شبکه بندی نیاز به گسسته سازی معادله دیفرانسیل حاکم بر رسانایی حرارتی درون ماده است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

برای این منظور با استفاده از بسط تیلور می توان مقادیر مشتق اول و دوم را بصورت زیر گسسته نمود:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n}\approx\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n}\approx\frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\longrightarrow \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n}\approx\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x}=\frac{T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

به همین صورت مشتق دوم در جهت y گسسته می شود:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{m,n}\approx\frac{T_{m,n+1}-2T_{m,n}+T_{m,n-1}}{\Delta y^2}$$

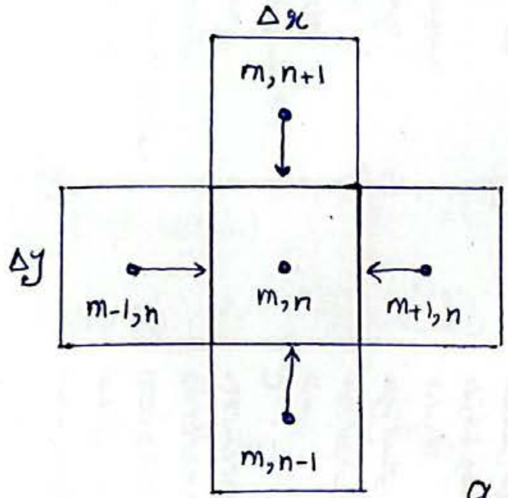
با جایگذاری فرم گسسته مشتق رتبه دوم در معادله دیفرانسیل و با درنظرگرفتن $\Delta x=\Delta y$ خواهیم داشت:

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0$$

این معادله را می‌توان برای تمامی گره‌های میانی موجود در شبکه در نظر گرفت. لازم به ذکر است که باید تعداد معادلات برابر با تعداد گره‌ها گردد تا بتوان با حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر دما برای تمامی گره‌ها تعیین نمود.

حال چنانچه در سیستم تولید گرما وجود داشته باشد و یا گره مورد نظر روی مرزهای سیستم (ماده) باشد می‌توان از روش موازنه انرژی برای تعیین فرم گسسته معادله حاکم در گره استفاده نمود. در این روش بقای انرژی را در حجم کنترل اطراف گره به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که تمام جریان‌های گرما به سوی گره فرض شود.

بطور مثال اگر در حجم کنترل زیر به مقدار $\dot{q}$ گرما در واحد حجم تولید شود و عمق سیستم هم یک فرض شود موازنه انرژی بصورت زیر است:



$$\sum_{i=1}^{4} q_{i\to(m,n)} + \dot{q}(\Delta x\cdot\Delta y\cdot 1) = 0$$

که با استفاده از قانون فوریه می‌توان نرخ انتقال حرارت از هر یک از گره‌های مجاور را بدست آورد:

$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y\cdot 1)\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m+1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y\cdot 1)\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = k(\Delta x\cdot 1)\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

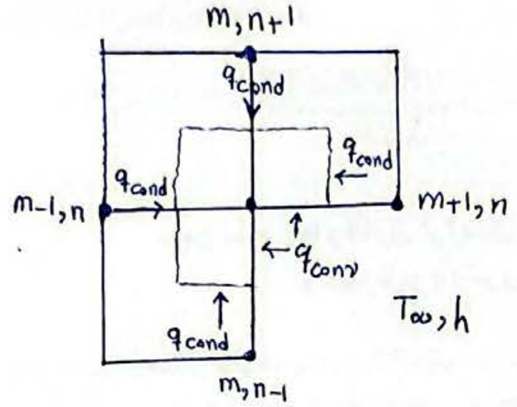
$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = k(\Delta x\cdot 1)\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

حال اگر $\Delta x=\Delta y$ باشد موازنه انرژی بصورت معادله زیر در خواهد آمد:

$$T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-4T_{m,n}+\frac{\dot{q}(\Delta x^2)}{k}=0$$

و یا بطور مثال اگر گره مورد نظر در گوشه داخلی و در شرایط جابه‌جایی باشد موازنه انرژی بصورت زیر خواهد بود:

مقادیر q_{cond} بوسیله قانون فوریه تعیین می‌شود:

①


$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y\cdot 1)\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = k(\Delta x\cdot 1)\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m+1,n)\to(m,n)} = k\left(\frac{\Delta y}{2}\cdot 1\right)\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = k\left(\frac{\Delta x}{2}\cdot 1\right)\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

نرخ کلی جابه‌جایی q_{conv} بوسیله قانون سرمایش نیوتن حاصل می‌شود:

$$q_{(\infty)\to(m,n)} = h\left(\frac{\Delta x}{2}\cdot 1\right)(T_\infty - T_{m,n}) + h\left(\frac{\Delta y}{2}\cdot 1\right)(T_\infty - T_{m,n})$$

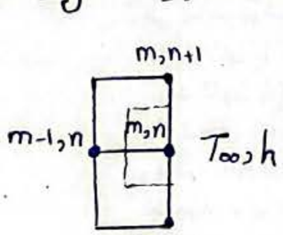
بنابراین در غیاب تولید انرژی با جمع کردن معادله‌های فوق خواهیم داشت:

$\Delta x = \Delta y$

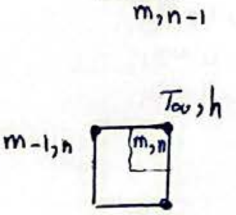
$$T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2}(T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + \frac{h\Delta x}{k}T_\infty - \left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

با استفاده از این روش می‌توان معادله حاکم بر گره‌های مرزی در شرایط زیر را نیز بدست آورد:

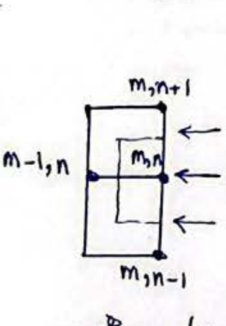
$\Delta x = \Delta y$

②


$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{2h\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n} = 0$$

③


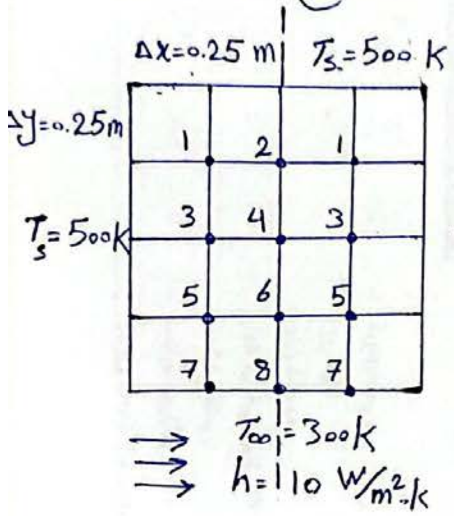
$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + \frac{2h\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n} = 0$$

④


$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{2q''\Delta x}{k} - 4T_{m,n} = 0$$

درصورتیکه سطح آدیاباتیک (یا سطح متقارن) باشد در حالت ② و ④ مقدار h یا q'' را برابر صفر قرار می‌دهیم.

ل: یک کوره صنعتی بزرگ روی ستونی از آجر نسوز به مقطع یک متر در یک متر قرار دارد. در شرایط کارکرد دائم، سه سطح این ستون در دمای $500K$ و سطح دیگر در معرض جریان هوا به دمای $T_\infty=300K$ و ضریب جابجایی $10\ \frac{W}{m^2.K}$ قرار دارند. با استفاده از شبکه‌ای با $\Delta x=\Delta y=0.25$ توزیع دمای دو بعدی در ستون را با ضریب رسانش $k=1\ \frac{W}{mK}$ بدست آورید.



شبکه داده شده دارای 12 گره با دمای نامعلوم است که از طریق تقارن به 8 گره کاهش یافته است.

گره‌های 1، 3، 5 گره‌های میانی هستند که از معادله زیر برای هر گره استفاده می‌کنیم:

$$T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-4T_{m,n}=0$$

گره 1 $\quad T_2+T_3+1000-4T_1=0$

3 " $\quad T_1+T_4+T_5+500-4T_3=0$

5 " $\quad T_3+T_6+T_7+500-4T_5=0$

گره‌های 2، 4، 6 روی خط تقارن آدیاباتیک قرار دارند:

$$2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0$$

گره 2 $\quad 2T_1+T_4+500-4T_2=0$

4 " $\quad T_2+2T_3+T_6-4T_4=0$

6 " $\quad T_4+2T_5+T_8-4T_6=0$

گره 7 و 8 گره‌های مرزی هستند که در مجاورت جریان جابجایی قرار گرفته‌اند $\frac{h\Delta x}{k}=2.5$

گره 7 $\quad 2T_5+T_8+2000-9T_7=0$

8 " $\quad 2T_6+2T_7+1500-9T_8=0$

حال این ۸ معادله را به فرم ماتریس مرتب نموده و دستگاه معادلات را به کمک روش وارون سازی و یا روش تکرار گوس-سایدل حل می‌نماییم تا مقادیر T در هر گره بدست آید.

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -1000 \\ -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -2000 \\ -1500 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 489.30 \\ 485.15 \\ 472.07 \\ 462.01 \\ 436.95 \\ 418.74 \\ 356.99 \\ 399.05 \end{bmatrix}
$$

فصل پنجم : رسانایی گرمایی گذرا (غیر دائم)

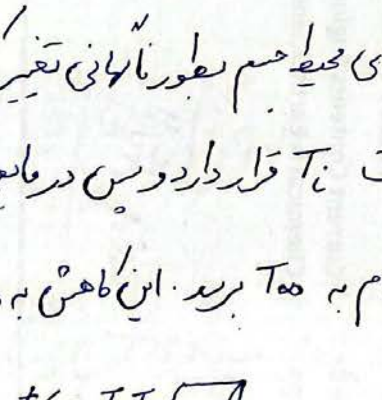
بسیاری از مسأله‌های انتقال گرما به زمان بستگی دارد. معمولاً چنین مسأله‌های غیر دائم یا گذرا هنگامی که شرایط مرزی سیستم تغییر می‌کند به وجود می‌آید.

برای تعیین وابستگی توزیع دما به زمان در یک جامد می‌توان از معادله گرما استفاده نمود و در حالت‌های مختلف بصورت یک حل تحلیلی و یا عددی پاسخ را بدست آورد.

هنگامی که گرادیان دما در داخل جسم کوچک باشد می‌توان از ساده‌ترین روش یعنی روش ظرفیت فشرده استفاده کرد.

- روش ظرفیت فشرده (Lumped capacitance)

یکی از مسأله‌های ساده و متداول رسانایی غیر دائم زمانی رخ می‌دهد که دمای محیط جسم بطور ناگهانی تغییر کند. بطور مثال یک شمش فلزی داغ را در نظر بگیرید که ابتدا در دمای یکنواخت T_i قرار دارد و سپس در مایعی با دمای $T_\infty < T_i$ خنک می‌شود. در اینصورت دمای جسم کاهش یافته تا سرانجام به T_∞ برسد. این کاهش به دلیل انتقال گرمای جابجایی در سطح مشترک جامد-مایع رخ می‌دهد.



اصل روش ظرفیت فشرده بر این فرض استوار است که دمای جسم در هر لحظه از فرآیند غیر دائم از نظر مکانی یکنواخت است.

با چشم پوشی از گرادیان دما در داخل جسم می‌توان با استفاده از موازنه انرژی روی جسم دمای حالت گذرا را تعیین نمود:

$$-\dot{E}_{out} = \dot{E}_s$$

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

برای حل این معادله از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$\theta \equiv T - T_\infty \longrightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

بنابراین با استفاده از این متغیر معادله بصورت زیر در می آید:

$$-hA_s\theta = \rho Vc \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{\rho Vc}{hA_s}\int_{\theta_i}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^t dt \qquad \theta_i \equiv T_i - T_\infty$$

$$\longrightarrow \frac{\rho Vc}{hA_s}\ln\frac{\theta_i}{\theta} = t \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp\left[-\frac{hA_s}{\rho Vc}t\right]$$

که به $\frac{\rho Vc}{hA_s}$ ثابت زمانی گرمایی گفته می شود. (τ_t)

همچنین مقدار کل انرژی انتقال یافته تا زمان t را می توان بصورت زیر بدست آورد:

$$Q = \int_0^t q\,dt = hA_s\int_0^t \theta\,dt = (\rho Vc)\theta_i\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right)\right]$$

نتایج روش ظرفیت فشرده زمانی اعتبار دارد که مقاومت در برابر رسانایی در داخل جسم خیلی کمتر از مقاومت در مقابل جابه جایی در لایه مرزی سیال باشد. برای بررسی این شرایط عددی بعد بیو (Biot Number) معرفی می گردد:

$$Bi \equiv \frac{hL}{K} \qquad \frac{hL}{K} = \frac{(L/KA)}{(1/hA)} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$$

بنابراین چنانچه عدد بیو به اندازه کافی کوچک باشد روش ظرفیت فشرده معتبر است:

$$Bi = \frac{hL_c}{K} < 0.1$$

که L_c همان طول مشخصه است. طول مشخصه بصورت حجم جسم تقسیم بر مساحت سطح آن تعریف می‌شود:

$$L_c \equiv \frac{V}{A_s}$$

$$L_c \xrightarrow{\text{دیواره تخت با ضخامت } 2L} L$$

$$L_c \xrightarrow{\text{استوانه بلند}} \frac{r_0}{2}$$

$$L_c \xrightarrow{\text{کره}} \frac{r_0}{3}$$

با تعریف L_c می‌توان توزیع دما در شرایط روش ظرفیت فشرده را بصورت زیر نیز در نظر گرفت:

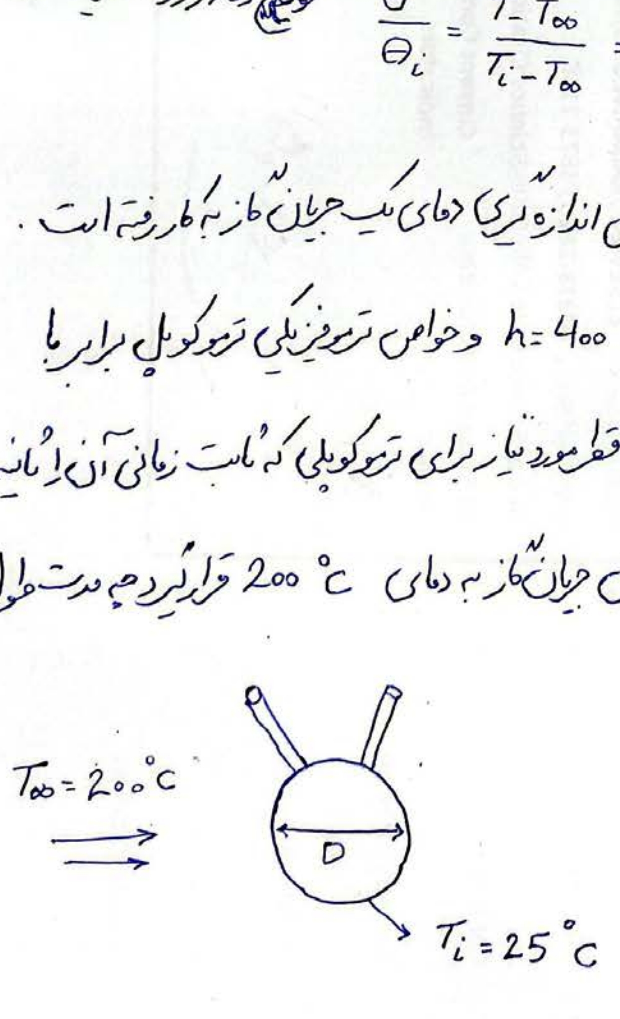
$$\frac{hA_s}{\rho V c}t = \frac{ht}{\rho c L_c} = \underbrace{\frac{hL_c}{k}}_{Bi}\ \underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\alpha}\ \frac{t}{L_c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{hA_s}{\rho V c}t = Bi \cdot Fo$$

عدد بی‌بعد فوریه $Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2}$

توزیع دما در روش ظرفیت فشرده $\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp(-Bi \cdot Fo)$

مثال: نقطه اتصال یک ترموکوپل که تقریباً کروی شکل است برای اندازه گیری دمای یک جریان گاز به کار رفته است. ضریب جابه‌جایی بین سطح اتصال و گاز برابر با $h=400 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ و خواص ترموفیزیکی ترموکوپل برابر با $k=20 \frac{W}{m \cdot K}$، $c=400 \frac{J}{kg \cdot K}$ و $\rho=8500 \frac{kg}{m^3}$ است. قطر مورد نیاز برای ترموکوپلی که ثابت زمانی آن ۱ ثانیه باشد چقدر است؟ اگر دمای ترموکوپل $25\,^\circ C$ باشد و در معرض جریان گاز به دمای $200\,^\circ C$ قرار گیرد چه مدت طول می‌کشد تا ترموکوپل به دمای $199\,^\circ C$ برسد؟



ثابت زمانی $\tau_t = \dfrac{\rho V c}{h A_s} = \dfrac{\rho \pi D^3}{6} c \times \dfrac{1}{h \pi D^2} \xrightarrow{\tau_t = 1} D = 7.06 \times 10^{-4}\ m$

حال با استفاده از عدد Bi اعتبار روش ظرفیت فشرده بررسی می گردد:

$$Bi = \frac{h\left(\frac{r_0}{3}\right)}{k} = \frac{400 \times 3.53 \times 10^{-4}}{3 \times 20} = 2.35 \times 10^{-4} < 0.1$$

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho D c}{6h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{8500 \times 7.06 \times 10^{-4} \times 400}{6 \times 400} \ln \frac{25 - 200}{199 - 200}$$

$$= 5.2\ s$$